Mat B, 10.aflevering

ldg790 - Christian B. Gustafson

April 2020

opgave 4

Lad funktionen f være givet ved forskriften

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}y^4 + 2x^2 + y^2 - xy + 7, \text{ for alle (x,y) } \in R^2$$

(1) Bestem de partielle afledede $f_1'(x,y)$ og $f_2'(x,y)$ samt hessematricen $f''(x,y)$

$$f_1'(x,y) = x^3 + 4x - y, \text{ og } f_{11}''3x^2 + 4$$

$$f_2'(x,y) = \frac{4}{3}y^3 + 2y - x \text{ og } f_{22}''4y^2 + 2$$

Nu bestemmer jeg resten af de partielle afledede

$$f_{12}'' = -1 = f_{21}''$$

Hessematricen ser således ud:

$$Hesse = \begin{pmatrix} 3x^2 + 4 & -1 \\ -1 & 4y^2 + 2 \end{pmatrix}$$

(2)Vis, at f er en strengt konveks funktion.

For at f er strengt konveks skal der gælde følgende

$$f_{11}'' > 0 \text{ og } f_{11}''f_{22}'' - (f_{12}'')^2 > 0$$

$$(3x^2 + 4) \cdot (4y^2 + 2) - (-1)^2 \geq 4 \cdot 2 - 1 \text{ hvis x og y er lig 0 så: } = 7 > 0$$

Som vi kan se opfylder de betingelserne for at være streng konveks. Den første betingelse for f''_{11} er oplagt positiv for alle værdier $(x, y) \in R^2$. Hessematricen er positiv definit for alle (x,y) $\in R^2$ så f er en strengt konveks funktion

(3) Vis, at punktet (0,0) er et stationært punkt for f.

Vi indsæter 0 i de partielle afledede og dermed skal vi få dem til at være lig 0, hvis punktet (0,0) er et stationært punkt.

$$f'_1(0,0) = 0 \to 0^3 + 4(0) - 0 = 0$$

Indsætter Y i næste ligning

$$f'_2(0,0) = 0 \to \frac{4}{3}((0)^3 + 4(0))^3 + 2((0)^3 + 4(0)) - (0) = 0$$

Vi kan alta se at punktet (0,0) er et stationært punkt for f.

4) Find værdimængden for f.

Eftersom f er streng konveks må det stationære punkt (0,0) være et globalt minimumspunkt for f. Jf. THM 3.1.2

Dertil finder vil den globale minimums værdi til:

$$f(0,0) = 7$$

Og hvis vi sætter y til 0 og lader x gå mod uendelig får vi:

$$f(x,0) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 7 \to \infty \text{ for } x \to \infty$$

Eftersom f er kontinuert på R^2 er værdimængden dermed: $f[7, \infty[$

Dobbeltintegrale

$$\int_0^1 (\int_0^2 (2x^3 + 3y^2)dy)dx$$

Jeg starter med at intergrere det indre integrale først med hensyn til y:

$$\int_0^2 (2x^3 + 3y^2)dy = \int 2x^3 + \int 3y^2 = [2x^3y]_0^2 + [y^3]_0^2 = 4x^3 + 8$$

Nu integrere jeg den sidste del med hensyn til x

$$\int_0^1 (4x^3 + 8) = [x^4 + 8x]_0^1 = 9$$

Dvs. $\underline{\underline{\int_0^1 (\int_0^2 (2x^3 + 3y^2)dy)dx = 9}}$