Mat B, 2.aflevering

ldg790 - Christian B. Gustafson

uge 9-2019

Opgave 3

(a) Bestem alle løsninger til ligningssystemet

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = 1$$

$$-2x_1 + x_2 - 6x_3 = 6$$

$$x_2 + 4x_3 = -2$$

Starter med at opstille ligningerne i en matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, R_1 \cdot 2 + R_2 \to R_2 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -10 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

$$R_2 + R_3 \to R_3 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}, R_2 \cdot (-1) + R_1 \to R_1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & -7 \\ 0 & -1 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{pmatrix},$$

$$R_3 \cdot (-\frac{1}{6}) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & -7 \\ 0 & -1 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, R_3 \cdot (-8) + R_1 \to R_1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R_3 \cdot 10 + R_2 \to R_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, R_2 \cdot (-1) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

Det kan nu aflæses fra matricen at:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

(b) Bestem alle løsninger til ligningssystemet

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$$

$$-x_2 - 2x_3 = 1$$

Starter med at opstille ligningerne i en matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, R_1 \cdot (-1) + R_2 \rightarrow R_2 : \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_2 + R_3 \rightarrow R_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R_1 \cdot (-1) + R_2 \rightarrow R_1 \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2 \cdot \frac{1}{2} : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R_1 \cdot (-1) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Dvs. at den nederste ligning i matricen vil blive en fri variabel, hvor $x_3 = t$ Altså, ligningen vil være således:

$$x_1 - 3t = 1 \rightarrow x_1 = 1 + 3t$$

$$x_2 + 2t = -1 \rightarrow x_2 = -1 - 2t$$

$$\underline{\underline{(x_1, x_2, x_3) = (1 + 3t, -1 - 2t, t)}}$$

Review 10

A firm has two plants that produce outputs of three different goods. Its total labour force is fixed.When a fraction λ of its labour force is allocated to its first plant and a fraction $1 - \lambda$ to its second plant, with $0 \leq \lambda \leq 1$, the total output of the three different goods is given by the vector

$$\lambda(8, 4, 4) + (1 - \lambda)(2, 6, 10) = (6\lambda + 2, -2\lambda + 6, -6\lambda + 10)$$

(a) Is it possible for the firm to produce either of the two output vectors a= (5,5,7) and b= (7,5,5) if output cannot be thrown away?

Først undersøges det hvad lambda skal være for at producere a,

$$(6\lambda + 2, -2\lambda + 6, -6\lambda + 10) = (5, 5, 7)$$

$$5 = 6\lambda + 2 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$5 = -2\lambda + 6 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$7 = -6\lambda + 10 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

Dvs. for at producere a skal $\lambda = \frac{1}{2}$

Nu undersøges b

$$(6\lambda + 2, -2\lambda + 6, -6\lambda + 10) = (7, 5, 5)$$

$$7 = 6\lambda + 2 \rightarrow \lambda = \frac{5}{6}$$

$$5 = -2\lambda + 6 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$5 = -6\lambda + 10 \rightarrow \lambda = \frac{5}{6}$$

Som det ses er det ikke et entydigt løsning for b, hvilket betyder at man ikke kan producere b.

(b)How do your answers to part (a) change if output can be thrown away.
I ovenstående opgave (a) så vi at a sagtens kunne blive produceret uden at smide noget væk. Dog kunne b ikke blive produceret. Hvis vi nu får muligheden for at smide output væk så skal vi opskrive ligningerne på følgende måde for λ i $[0, 1]$ sådan at, $6\lambda + 2 \geq 7, -2\lambda + 6 \geq 5, -6\lambda + 10 \geq 5$

Hvis vi reducere udtrykket får vi: $\lambda \geq \frac{5}{6}, \lambda \geq \frac{1}{2}, \lambda \leq \frac{5}{6}$, Dette udtryk går altså ikke op.

(c) How will the revenue-maximizing choice of the fraction λ depend upon the selling prices (p_1, p_2, p_3) of the three goods? What condition must be satisfied by these prices if both plants are to remain in use?
Revenue:

$$R(\lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = (6p_1 - 2p_2 - 6p_3)\lambda + 2p_1 + 6p_2 + 10p_3$$

Ud fra begrænsningen om at λ var i et givent interval $[0, 1]$, så betyder det, hvis den konstante hældning, $6p_1 - 2p_2 - 6p_3 > 0$, så vil $R(\lambda)$ maksimeres ved $\lambda = 1$ og omvendt kan det ses at hvis $6p_1 - 2p_2 - 6p_3 < 0$ så vil $R(\lambda)$ maksimeres ved $\lambda = 0$. Dermed vil der i special tilfældet, $6p_1 - 2p_2 - 6p_3 = 0$ kunne opnås at begge planter kan bruges.