4.Aflevering, Mikro 1

ldg790 - Christian B. Gustafson

September 2020

Vi får givet følgende nyttefunktion:

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$$

(a)

For at finde efterspørgselsfunktionen opstiller vi først maksimeringsproblemet:

$$\max_{x_1, x_2} \quad x_1 x_2^2 \text{ u.b.b } p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$$

Vi ved at begge varer er essentielle, samt der er monotone og strengt konvekse præferencer grundet antagelserne. Det betyder også at løsningen vil være et indre punkt.
Vi opskriver lagrangefunktionen ved:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2^2 + \lambda[I - p_1 x_1 - p_2 x_2] \tag{1}$$

Nu beregne vi de tre førsteordensbetingelser (FOC):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = x_2^2 + \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow x_2^2 = \lambda p_1 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2x_1 x_1 + \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 x_2 = \lambda p_2 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \Leftrightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \tag{4}$$

Vi deler nu 2 med 3.

$$\frac{x_2^2}{2x_1 x_2} = \frac{\lambda p_1}{\lambda p_2} \tag{5}$$

$$\frac{x_2}{2x_1} = \frac{p_1}{p_2} \tag{6}$$

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2} 2x_1 = x_2^*(p_1, p_2, x_1) \tag{7}$$

Vi tager 7 og indsætter i 4 (budgetlinjen)

$$p_1x_1 + p_2(\frac{p_1}{p_2} 2x_1) = I \tag{8}$$

$$p_1x_1 = I - p_1 2x_1 \tag{9}$$

$$3x_1 = \frac{I}{p_1} \tag{10}$$

$$x_1^* = \frac{I}{3p_1} \tag{11}$$

Vi indsætter nu 11 i 7

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2} 2(\frac{I}{3p_1}) \Leftrightarrow \tag{12}$$

$$x_2^* = \frac{2I}{3p_2} \tag{13}$$

Efterspørgselsfunktionen kan nu skrives som:

$$x^*(p_1, p_2, I) = (\frac{I}{3p_1}, \frac{2I}{3p_2}) \tag{14}$$

(b)

For at finde det efterspurgte varebundt $(x_1^*, x_2^*) = x * (20, 20, 100)$ gør vi følgende:

$$x_1^* = x_1^*(20, 20, 100) = \frac{100}{3 \cdot 20} = 1.67$$

$$x_2^* = x_2^*(20, 20, 100) = \frac{2 \cdot 100}{3 \cdot 20} = 3.34$$

(c)

$$u(1.67, 3.33) = 1.67(3.33)^2 = 18.52$$

Først opstilles minimeringsproblemet:

$$\min_{x_1, x_2} \quad p_1x_1 + p_2x_2 \text{ u.b.b } x_1x_2^2 = u \tag{15}$$

Nu opskriver vi lagrange-funktionen:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda[u - x_1x_2^2] \tag{16}$$

Nu kan vi beregne førsteordensbetingelserne (FOC):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{x_1} = p_1 - \lambda x_2^2 \Leftrightarrow p_1 = \lambda x_2^2 \tag{17}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{x_2} = p_2 - 2\lambda x_1 x_2 \Leftrightarrow p_2 = 2\lambda x_1 x_2 \tag{18}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\lambda} = u - x_1 x_2^2 \Leftrightarrow u = x_1 x_2^2 \tag{19}$$

Nu deler vi (17) med (18), og derved isolerer x_2:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\lambda x_2^2}{2\lambda x_1 x_2} \Leftrightarrow \tag{20}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2}{2x_1} \Leftrightarrow \tag{21}$$

$$2x_1(\frac{p_1}{p_2}) = x_2 \equiv h_2^*(p_1, p_2 x_1) \tag{22}$$

Vi indsætter nu (22) i (19) og udleder x_1:

$$u = x_1(2x_1\frac{p_1}{p_2})^2 \tag{23}$$

$$u = 4x_1^3\frac{p_1^2}{p_2^2} \tag{24}$$

$$\frac{up_2^2}{4p_1^2} = x_1^3 \tag{25}$$

$$x_1 = (\frac{up_2^2}{4p_1^2})^{\frac{1}{3}} \equiv h_1^*(p_1.p_2, u)$$

Vi indsætter nu (25) i (22)

$$x_2 = x_2^*(p_1, p_2, x_1) \Leftrightarrow \tag{26}$$

$$x_2^* = 2((\frac{up_2^2}{4p_1^2})^{\frac{1}{3}})(\frac{p_1}{p_2}) \tag{27}$$

$$x_2^* = 2^{\frac{1}{3}}(\frac{up_1}{p_2})^{\frac{1}{3}} \equiv h_2^*(p_1, p_2, u) \tag{28}$$

(e)

For at finde løsningen $(y_1^* y_2^*) = h^*(20, 20, u^*)$ gør vi følgende:

$$y_1^* = h_1^*(20, 20, 18.52) = (\frac{18.52 \cdot (20)^2}{4(20)^2})^{\frac{1}{3}} = 1.67 \tag{29}$$

$$y_2^* = (20, 20, 18.52) = 2^{\frac{1}{3}}(18.52\frac{20}{20})^{\frac{1}{3}} = 3.33 \tag{30}$$

(f)

$$u(1.67, 3.33) = 1.67(3.33)^2 = 18.52 \tag{31}$$

(g)

Dette løser vi ved:

$$\tilde{x}_1^* = x_1^*(20, 25, 100) = \frac{100}{3 \cdot 20} = 1.67 \tag{32}$$

$$\tilde{x}_2^* = x_2^*(20, 25, 100) = \frac{2 \cdot 100}{3 \cdot 25} = 2.67 \tag{33}$$

(h)

Finder vi ved at:

$$\tilde{y}_1^* = h_1^*(20, 25, 18.52) = (\frac{(18.52)(25)^2}{4(20)^2})^{\frac{1}{3}} = 1.93 \tag{34}$$

$$\tilde{y}_2^* = h_2^*(20, 25, 18.52) = 2^{\frac{1}{3}}(\frac{18.52 \cdot 20}{25})^{\frac{1}{3}} = 3.09 \tag{35}$$

(i)

$(\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*)$ angiver det nyttemaksimerende forbrugsbundt med de nye priser. Altså, det forbrugsbundt forbrugeren faktisk ville vælge efter prisændringen. $(\tilde{y}_1^*, \tilde{y}_2^*)$ er derimod det bundt forbrugeren ville vælge med de nye priser, hvis forbrugeren blev indkomstpenseret sådan, at forbrugeren præcis kunne opnå samme nytte, som forbrugeren fik før prisændringen. Derfor må det gælde at: $u(\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*) < (\tilde{y}_1^*, \tilde{y}_2^*)$.