5.Aflevering, Makro 1

ldg790 - Christian B. Gustafson

November 2020

1 Spørgsmål 1

1.a)

Både og. Man kan sige at antal uddannelsesår et præcist mål, eftersom uddannelse er knyttet til den enkelte arbejders evner og vil dermed øge produktivitet. Dog kan man også argumentere for, at der findes andre faktorer, som uddannelsår ikke svarer på, såsom erfaring, helbred, IQ og taleevne. Altså, evner som kan påvirke produktivitet positivt, men som ikke direkte kan måles præcist. Dvs. der findes også andre faktorer udover antallet af udannelsesår, som kan være mere relevant at undersøge ift. humankapital/produktivitet.

1.b)

Ud fra figuren kan vi se at der er en positiv tendens med at jo flere år man går i skole desto større BNP/indbygger opstår der. Dog er der stadig nogle outliers hvor den gennemgående tendens ikke passer. Fx ser vi at USA har mange uddannelsesår, men har ikke tilsvarende en rigtig BNP/indbygger. Hvorimod Portugal har en gennemsnitlig skolegang, men har tværtimod en højere BNP/indbygger end hvad der forventes. Altså, er der andre faktorer som også spilder ind men som der ikke bliver taget højde for i denne model, hvilket betyder vi ikke blot på baggrund af figuren kan konkludere, at et højere uddannelsesniveau øger BNP/indbygger.

Spørgsmål 2

2.a)

Solowligningen for humankapital er givet ved: $K_{t+1} - K_t = s_H Y_t - \delta H_t$. Her ser vi at opsparingen i humankapital (s_H) er ganget på Y_t, som betyder at

indkomsten bliver beskattet. Grunden til hvorfor denne model kan opfattes som en model hvori en regering finansierer uddannelsessystemet gennem en skat på indkomst, skyldes at man kan se det som at regeringen bruger noget af skatten de får fra indkomsten, til at dække uddannelsessystemet.
Altså, vi kan se at de totale investeringer i begge former for kapital ender med at blive en andel af indkomsten Y_t. Dvs. at vi kan definere opsparingsraterne fra den almindelige Solowmodel med humankapital til at tage højde for staten.

2.b)

For at finde Solowligningerne starter vi med at udlede transitionsligningen for fysisk kapital. Vi tager udgangspunkt i ligning (4) og dividere igennem med (2) og (3):

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} = \frac{s_K Y_t + (1-\delta-\tau)K_t}{(1+n)L_t(1+g)A_t}$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s_K\tilde{y}_t + (1-\delta-\tau)\tilde{k}_t)$$

Så vi husker vi at: $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi}$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s_K\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta-\tau)\tilde{k}_t)$$

Nu trækker vi $\tilde{k}_t$ fra på begge sider og finder solowligningen for fysisk kapital:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s_K\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta-\tau)\tilde{k}_t) - \tilde{k}_t$$

Nu ganger vi med 1, som er en brøk hvor $(1+n)(1+g)$ er i både tæller og nævner, hvor vi dermed opnår ligningen:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s_K\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi} - (\delta-\tau+n+g+ng)\tilde{k}_t)$$

Nu kan vi finde transitionsligningen for humankapital ved at bruge ligning 5 og dividerer igennem med ligning nr. 2 og 3:

$$\frac{H_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} = \frac{\tau K_t + (1-\delta)H_t}{(1+n)L_t(1+g)A_t}$$

$$\tilde{h}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(\tau\tilde{h}_t + (1-\delta)\tilde{h}_t)$$

$$\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(\tau\tilde{h}_t + (1-\delta)\tilde{h}_t) - \tilde{h}_t$$

Ved at benytte samme trick som før får vi følgende:

$$\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(\tau\tilde{k}_t - (\delta + n + g + ng)\tilde{h}_t)$$

Måden hvorpå den adskiller sig fra den generelle model er, at her bliver statens skatteindtægter τY_t og husholdningernes disponible indkomst bliver $(1-\tau)Y_t$

2.c)

For at tegne fasediagrammet bliver vi først nødt til at undersøge Solowligningerne når $\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \Delta\tilde{k}_t$ og $\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = \Delta\tilde{h}_t = 0$. Dette gør vi ved at sætte vesntre side lig 0 og silere mht. $\tilde{h}_t$. Starter med $\tilde{k}_t$:

$$0 = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s_K\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi} - (\delta - \tau + n + g + ng)\tilde{k}_t) \Leftrightarrow$$

$$0 = s_K\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi} - (\delta - \tau + n + g + ng)\tilde{k}_t \Leftrightarrow$$

$$(\delta - \tau + n + g + ng)\tilde{k}_t = s_K\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi} \Leftrightarrow$$

$$(\delta - \tau + n + g + ng)\tilde{k}_t^{1-\alpha} = s_K\tilde{h}_t^{\phi} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\delta - \tau + n + g + ng)\tilde{k}_t^{1-\alpha}}{s_K} = \tilde{h}_t^{\phi}$$

$$(\frac{(\delta - \tau + n + g + ng)}{s_K})^{\frac{1}{\phi}}\tilde{k}_t^{\frac{1-\alpha}{\phi}} = \tilde{h}_t$$

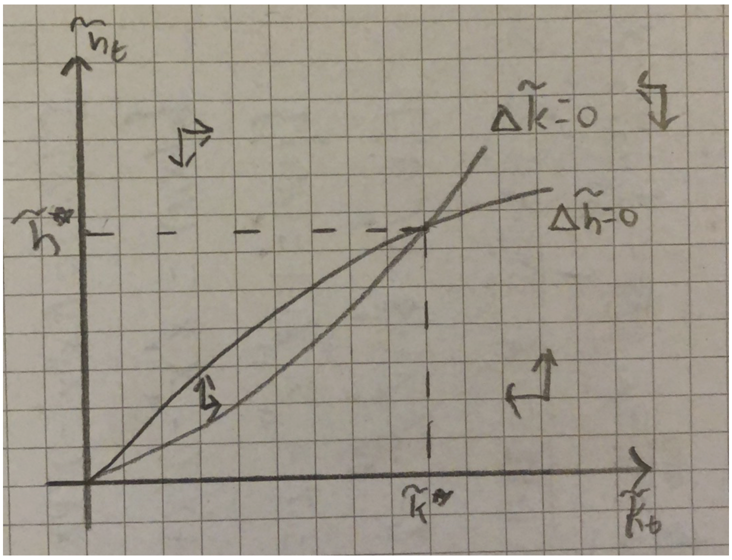
Det samme gør vi for humankapital:

$$0 = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(\tau\tilde{k}_t - (\delta + n + g + ng)\tilde{h}_t)$$

$$\tau\tilde{k}_t = (\delta + n + g + ng)\tilde{h}_t$$

$$\frac{\tau}{(\delta + n + g + ng)}\tilde{k}_t = \tilde{h}_t$$

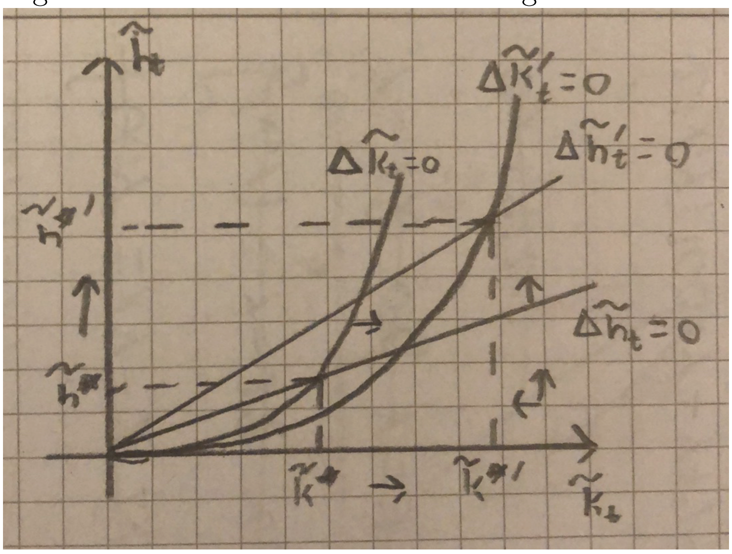
Vi antager at α og $\phi = \frac{1}{3}$:
Figuren nedenunder illustrere fasediagrammet:



Pilene på diagrammet indikerer, hvilke retninger$\tilde{k}_t$ og $\tilde{h}_t$ vokser. Vi ser at når $\tilde{k}_t$ stiger vil $\tilde{h}_t$ også stige og modsat vil gælde ved et fald.

2.d)

For at vise hvad der sker hvis τ øges, tager jeg udgangspunkt i resultaterne fra opgave 2.c. Vi ser at når τ stiger så vil fysisk og humankapital også stige. Højere τ medfører højere skatteprovenu som øger opsparingen i uddannelse, dvs. opsparingen i humankapital øges. Dvs. at dette vil øge produktiviteten per effektiv arbejder og dertil føre til en stigning i oparisng i fysisk kapital. Altså, vil vi befinde os på et højere ss niveau end før.
Figuren nedenunder illustrerer fasediagrammet hvor τ øges:



2.e)

For at finde ss-værdien for y bliver først nødt til at finde ss-værdien for $\tilde{k}_t^*$ og $\tilde{h}_t^*$

$$0 = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s_K \tilde{k}_t^\alpha \tilde{h}_t^\phi - (\delta + \tau + n + g + ng)\tilde{k}_t) \Leftrightarrow$$

$$(\delta + \tau + n + g + ng)\tilde{k}_t^{1-\alpha} = s_K \tilde{h}_t^\phi$$

Nu substituere vi vores udtryk for humankapital ind:

$$(\delta + \tau + n + g + ng)\tilde{k}_t^{1-\alpha} = s_K (\frac{\tau}{(\delta + n + g + ng)}\tilde{k}_t)^\phi$$

$$\tilde{k}_t^{1-\alpha} = \frac{s_K}{(\delta + \tau + n + g + ng)} \cdot (\frac{\tau}{(\delta + n + g + ng)}\tilde{k}_t)^\phi$$

$$\tilde{k}_t^{1-\alpha-\phi} = \frac{s_K}{(\delta + \tau + n + g + ng)} \cdot (\frac{\tau}{(\delta + n + g + ng)})^\phi$$

$$\tilde{k}_t^* = (\frac{s_K}{(\delta + \tau + n + g + ng)} \cdot (\frac{\tau}{(\delta + n + g + ng)})^\phi)^{\frac{1}{1-\alpha-\phi}}$$

Nu for $\tilde{h}_t^*$ som vi havde beregnet i opgave 2.c:

$$\frac{\tau}{(\delta + n + g + ng)}\tilde{k}_t = \tilde{h}_t$$

Indsætter k:

$$\frac{\tau}{(\delta + n + g + ng)}(\frac{s_K}{(\delta + \tau + n + g + ng)} \cdot (\frac{\tau}{(\delta + n + g + ng)})^\phi)^{\frac{1}{1-\alpha-\phi}} = \tilde{h}_t$$

Så benytter vi os af at, $\tilde{y}_t^* = (\tilde{k}^*)^\alpha (\tilde{h}^*)^\phi$

$$\tilde{y}_t^* = ((\frac{s_K}{(\delta + \tau + n + g + ng)} \cdot (\frac{\tau}{(\delta + n + g + ng)})^\phi)^{\frac{1}{1-\alpha-\phi}})^\alpha$$

$$\cdot(\frac{\tau}{(\delta + n + g + ng)}(\frac{s_K}{(\delta + \tau + n + g + ng)} \cdot (\frac{\tau}{(\delta + n + g + ng)})^\phi)^{\frac{1}{1-\alpha-\phi}})^\phi$$

$$\tilde{y}_t^* = (\frac{s_K}{(\delta + \tau + n + g + ng)})^{\frac{\alpha+\phi}{1-\alpha-\phi}} \cdot (\frac{\tau}{(\delta + n + g + ng)})^{\frac{\alpha\phi + (1-\alpha-\phi)\phi + \phi^2}{1-\alpha-\phi}}$$

$$\tilde{y}_t^* = (\frac{s_K}{(\delta + \tau + n + g + ng)})^{\frac{\alpha+\phi}{1-\alpha-\phi}} \cdot (\frac{\tau}{(\delta + n + g + ng)})^{\frac{\phi}{1-\alpha-\phi}}$$

Og hvis vi lige vender dem får vi altså:

$$\tilde{y}_t^* = (\frac{\tau}{(\delta + n + g + ng)})^{\frac{\phi}{1-\alpha-\phi}} \cdot (\frac{s_K}{(\delta + \tau + n + g + ng)})^{\frac{\alpha+\phi}{1-\alpha-\phi}}$$

2.f)

Vi tager $ln\tilde{c}^*$ for at finde golden rule værdierne og dereftger differentiere mht. s_K og τ

$$ln\tilde{c}^* = ln(1-s_K) + \frac{\alpha+\phi}{1-\alpha-\phi}(ln(\tau) - ln((\delta+n+g+ng)))$$

$$+\frac{\alpha+\phi}{1-\alpha-\phi}ln(s_K) - ln((\delta+\tau+n+g+ng))$$

Nu differentiere vi mht. s_K:

$$\frac{\partial ln\tilde{c}^*}{\partial s_K} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{(1-s_K)} + \frac{\alpha+\phi}{1-\alpha-\phi}\frac{1}{s_K} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{1-s_K}s_K(-s_K+1)(1-\alpha-\phi) + \frac{\alpha+\phi}{s_K(1-\alpha-\phi)}s_K(-s_K+1)(1-\alpha-\phi)$$

$$= 0\cdot\ s_K(-s_K+1)(1-\alpha-\phi) \Leftrightarrow$$

$$-s_K(1-\alpha-\phi) + (\alpha+\phi)(-s_K+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-s_K + \alpha + \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$s_K = \alpha + \phi$$

Nu vil jeg differentiere mht. τ:

$$\frac{\partial ln\tilde{c}^*}{\partial \tau} = 0$$

$$\frac{\phi}{1-\alpha-\phi}\cdot\frac{1}{\tau} + \frac{\alpha+\phi}{1-\alpha-\phi}\cdot\frac{-1}{(\delta+\tau+n+g+ng)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\phi}{1-\alpha-\phi}\tau = \frac{\alpha+\phi}{(1-\alpha-\phi)(\delta\tau+n+g+ng)} \Leftrightarrow$$

$$\phi(\delta+\tau+n+g+ng) = \tau(\alpha+\phi) \Leftrightarrow$$

$$\tau = \frac{\phi(\delta+n+g+ng)}{\alpha}$$

Nu udregner vi så $\tilde{c}^*$:

$$\tilde{c}^* = (1-S_K)\tilde{y}^*$$

Indsætter det fundne udtryk for $\tilde{y}^*$:

$$\tilde{c}^* = (1-S_K)(\frac{\tau}{(\delta+n+g+ng)})^{\frac{\phi}{1-\alpha-\phi}}\cdot(\frac{s_K}{(\delta+\tau+n+g+ng)})^{\frac{\alpha+\phi}{1-\alpha-\phi}}$$

Nu indsætter vi det fundne udtryk for tau og s_K:

$$\tilde{c}^* = (1-(\alpha+\phi))(\frac{(\frac{\phi(\delta+n+g+ng)}{\alpha})}{(\delta+n+g+ng)})^{\frac{\phi}{1-\alpha-\phi}} \cdot (\frac{(\alpha+\phi)}{(\delta+(\frac{\phi(\delta+n+g+ng)}{\alpha})+n+g+ng)})^{\frac{\alpha+\phi}{1-\alpha-\phi}}$$

$$\tilde{c}^* = (1-\alpha-\phi))(\frac{\phi(\delta+n+g+ng)}{\alpha(\delta+n+g+ng)}) \cdot (\frac{\alpha(\alpha+\phi)}{(\alpha\phi(\delta+n+g+ng)})^{\frac{\alpha+\phi}{1-\alpha-\phi}}$$

$$\tilde{c}^* = (1-\alpha-\phi))(\frac{\phi}{\alpha})^{\frac{\phi}{1-\alpha-\phi}} \cdot (\frac{(\alpha+\phi)}{\phi(\delta+n+g+ng)})^{\frac{\alpha+\phi}{1-\alpha-\phi}}$$

2.g

Det vi har fundet er en golden rule værdi for fysisk og humankapital, der maksimere vores vækststi, justeret for den teknologiske udvikling. Ved en større opsparingsrate, vil vi få en større indkomst end føre og dermed opnå højere ss end før. Dog hvis opsparingsraten er for høj vil forbrugskvoten blive lav. Altså, vil vi ikke forbruge og det vil give lavere indkomst.
Med hensyn til pensum så er golden rule værdien for s_K lig α, hvorimod vores model er lig $s_K = \alpha + \phi$. Altså, opsparingsraten til fysisk kapital der maksimere forbruget per effektiv arbejder er større i denne model fremfor modellen i pensum. Forskellen er bare, at modellen fra pensum regner med skat på indkomst, hvorimod modellen fra opgave ligger skatten på formueindkomsten. Dvs. at formuskat er en bedre måde at finansiere udannelsessystemet på end en indkomstskat.