Mat B, 5.aflevering

ldg790 - Christian B. Gustafson

uge 12-2020

Opgave 1.2.5

If a, b and c are linearly independent vectors in $\mathbf{R^m}$, prove that $\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{b}+\mathbf{c}$ and $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ are also linearly independtent. Is the same true of $\mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{b}+\mathbf{c}$ and $\mathbf{a}+\mathbf{c}$?

Vi kan starte med at gøre følgende:

$$\alpha(a+b)+\beta(b+c)+\gamma(a+c)=0.$$

$$\alpha a+\alpha b+\beta b \beta c+\gamma a+\gamma c=0$$

Det kan vi omskrive til følgende:

$$(\alpha+\gamma)a+(\alpha+\beta)b+(\beta+\gamma)c=0.$$

Eftersom a, b og c er lineært uafhængige, så følger det at:

$$\alpha+\gamma=0$$

$$\alpha+\beta=0$$

$$\beta+\gamma=0$$

Deraf følger det at:

$$\alpha=-\gamma=\beta=-\alpha=\gamma$$

Hvis $\alpha=-\alpha$ må vi have $\alpha=0$. Desuden har vi nu vist at $\alpha=\beta=\gamma$, så vi konkludere at eneste løsning er $\alpha=\beta=\gamma=0$ og dermed er $\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{b}+\mathbf{c}$ and $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ lineært uafhængige

Dette gælder ikke for $\mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{b}+\mathbf{c}$ and $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ fordi ligningen;

$$s_1(a-b)+s_2(b+c)+s_3(a+c)=0$$

har den ikke trivielle løsning $s_1=1$, $s_2=1$ og $s_3=-1$. Dette viser at vektorerne $\mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{b}+\mathbf{c}$ and $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ er lineært afhængige

Opgave 1.3.3

Give an example where $r(\mathbf{AB}) \neq r(\mathbf{BA})$

Vi betragter 2×2 matrixer. Disse matricer kan kun have rang 0, 1 eller 2. Den eneste matrix med rang 0 er 0-matricen. Dvs.

1)Hvis $r(A) = 0$ eller $r(B) = 0$ så vil $r(AB) = r(BA) = 0$ Jeg får ideen med følgende matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \text{ og } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$$

Nu viser jeg at $r(\mathbf{AB}) \neq r(\mathbf{BA})$

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4-4) & (8-8) \\ (8-8) & (16-16) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dvs. $r(AB) = 0$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4+16) & (1+4) \\ (-16-64) & (-4-16) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 5 \\ -80 & -20 \end{pmatrix}$$

For at bestemme hvor mange ranks der er i denne matrix, elimenere jeg række 2:

$$r_1 \cdot 4 + r_2 \rightarrow r_2 : \begin{pmatrix} 20 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der kan nu aflæses på matricen antallet af lineære uafhængige rækker, som er 1. Dvs. $r(BA) = 1$.

Altså, har vi fundet to matricer hvor: $r(\mathbf{AB}) \neq r(\mathbf{BA})$