6.Aflevering, Makro 1

ldg790 - Christian B. Gustafson

November 2020

Opgave 1

(1.1)

Ved semi-endogen vækst forstås der at i steady state, vil vækstraten i kapital per arbejder og output per arbejder være lig væksraten i teknologiniveauet. FOrmlen er givet således:

$$\frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = (1+n)^{\frac{\phi}{1-\phi}} - 1 \equiv g_{se}$$

Vi bemærker at en befolkningsvækstrate på 0 (n=0), medfører at der ingen vækst vil være. Dette er indgrebet af semi-endogen vækst. Hvis der skal gøres brug af stigende skalaafksat i produktioen er der nødt til at være en (eksogen -'semi') vækst i befolkningen (eksponenterne summere ikke til mere end 1). Dette kan undgås når phi=1, eftersom at der vil være konstant skalaafkast til kapital - dette kaldes for endogen vækst.

Ved endogen vækst forstås der, at hvis phi=1 er der ingen aftagende marginalprodukt på kapital og dermed vil økonomien ikke konvergere.

(1.2)

(R & D) handler om forskning og udvikling og beskriver en process for at opnå bedre teknologi. Disse ideer handler om offentlige goder der ikke er rivaliserende og ikke ekskluderbare. Dette medførere altså et manglende incitament til at udforske mere, fordi at $MC < AC$ for alle q, fordi at den faste omkostning til (R&D) ikke er indtægtsdækket.
Dog under monopol, hvor $MR = MC$, er der mulighed for (R&D), men der ville opstå produktion under det sociale optimum.

Ved perfekt konkurrence vil der ikke ske privat (R&D), og hvis ideen er ikke-ekskluderbar vil der ikke ske privat (R&D).
Dvs. at endogen vækst vil fremkomme når elasticiteten af eksisterende viden er lig en ($\phi = 1$). Desuden sætte n=0, for ellers vil der forekomme eksplosiv vækst.
Semi-endogen vækst vil fremkomme, når $0 < \phi < 1$. Vækstraten g_t i det teknologiske niveau (A_t) vil dermed konvergere monoton med en ss vækstrate $g_t \to g_{se}$ for t gående mod uendelig.

(1.3)

Først og fremmest så er knivsægtilfældet $\phi = 1$ meget urealistisk givet at der skulle være endogen vækst.
For semi-endogen vækst ser vi, at øget befolkningsvækst giver øget vækst. Dette stemmer umiddelbart ikke overens med empirien. Man kan dog forfølge ideen om empirisk data som dækker over transitorisk vækst (eftersom konvergens til ss er meget lang pga. eksternalitet), som afhænger negativt af befolkningstilvækst.

Opgave 2

2.1

For at vise at modellen udviser konstant skalaafkast, vil gange de fire led med samme produkt (lambda):

$$\begin{aligned}\lambda(K_t)^\alpha \lambda(A_t L_t)^\beta \lambda(X)^k \lambda(E_t)^\epsilon &= \lambda^{\alpha+\beta+k+\epsilon} K_t^\alpha (A_t L_t)^\beta X^k E_t^\epsilon \\ &= \lambda K_t^\alpha (A_t L_t)^\beta X^k E_t^\epsilon \\ &= \lambda Y_t\end{aligned}$$

Altså har vi nu vist at funktionen udviser konstant skalaafkast. Dette er plausibel fordi vi har vist, at når vi ganger alle fire input med samme faktor bliver outputter også ganget med samme faktor.

2.2

For at vise dette vil jeg tage udgangspunkt i ligning (1) og dividere med L på begge sider:

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^\alpha (A_t L_t)^\beta X^k E_t^\epsilon}{L_t} \Leftrightarrow$$

Så er det jo nemt at se, at ovenstående kan skrives som:

$$y_t = k_t^{\alpha} A_t^{\beta} x^k e_t^{\epsilon}$$

For at vise næste trin tager vi ln på begge sider og minuser med lny_{t-1}:

$$lny_t - lny_{t-1}$$

$$= \alpha(lnk_t - lnk_{t-1}) + \beta(lnA_t - lnA_{t-1}) + k(lnx_t - lnx_{t-1}) + \epsilon(lne_t + lne_{t-1}) \Leftrightarrow$$

Dette udtryk kan erstattes med g og derved skrives som:

$$g_t^y = \alpha g_t^k + \beta g_t^A + k g_t^x + \epsilon g_t^e$$

2.3

Til at starte med kan vi nævne følgende. $z_t \equiv K_t/Y_t = K_t/y_t$. Så ved vi at hvis z_t er konstant så må, $K_t/y_t = K_{t-1}/y_{t-1}$, hvilket følger at, $lnk_t - lnk_{t-1} = lny_t - lny_{t-1}$, hvilket også kan skrives som, $g_t^y = g_t^k$.
Vi ved desuden at hvis k_t/y_t er konstante så må det også gælde at de vokser med samme vækstrate, hvilket netop bekræfter at følgende må gælde $g_t^y = g_t^k$.
Videre ved vi at A har en konstant vækstrate på g, hvilket vi kan se ud fra (4). Og dermed har vi at den approksimative vækstrate må være $g_t^A = lnA_t - lnA_{t-a}$
For følgende må det gælde at, $g_t^x = lnx_t - lnx_{t-1} = ln(X/L_t) - ln(X/L_{t-1}) = lnX - lnX - (lnL_t - lnL_{t-1}) \equiv -g_t^L$. Fra (3) kan vi netop se, at for samme grund som for A, må følgende gælde, $g_t^L = n$ og dermed, $g_t^x = -n$.
Til sidst kan vi finde følgende, $g_t^e = lne_t - lne_{t-1} = ln(E_t/L_t) - LN(E_{t-1}/L_{t-1}) = ln(E_t - E_{t-1}) - ln(L_t - L_{t-1}) = ln(E_t - E_{t-1}) - n$. Fra (6) kan vi se at $lnE_t - lnE_{t-1} = ln(s_E R_t) - ln(s_E R_{t-1}) = lnR_t - lnR_{t-1} \equiv g_t^R$. Vi kan se at fra (5) og (6) at $R_t = R_{t-1} - E_{t-1} = R_{t-1} - s_E R_{t-1} = (1 - s_E)R_{t-1}$. Vi kan altså slutte af med at se, at vækstraten for R_t er $-s_E$, hvilket betyder at $g_t^R = -s_E$ og ved at samle leddende kan vi slutte af med $g_t^e = -s_E - n$.
Nu kan vi ved at indsætte de fundne resultater i (8) udlede følgende:

$$g_t^y = \alpha g_t^y + \beta g + k(-n) + \epsilon(-s_E - n) \Leftrightarrow$$

$$(1-\alpha) g_t^y = \beta g - kn - \epsilon(s_E + n) \Leftrightarrow$$

$$g_t^y = \frac{\beta g - kn - \epsilon(s_E + n)}{(1-\alpha)} \Leftrightarrow$$

$$g_t^y \approx \frac{\beta}{\beta + k + \epsilon} g - \frac{\epsilon}{\beta + k + \epsilon} n - \frac{k}{\beta + k + \epsilon}(n + s_E) \equiv g^y$$

Vi benytter her at, $(1-\alpha) = \beta + k + \epsilon$ og desuden ved vi at $g_t^y = g^y$ eftersom at alle led på højre side er konstante.
Hvis L_t stiger, ville det mindske outputtet grundet loven om aftagende marginal produkt. Det skaber så en negativ effekt af n og s_E som ses på en langsigtet vækst.

2.4

Ved at se på paramterene og antage deres værdier til: $\alpha = 0.2, \beta = 0.6, k = \epsilon = 0.1$, vil (9) blive:

$$g^y = 0.75g - 0.25n - 0.125s_E$$

Vi ser at hældningen på -0.25 ikke stemmer overens med figuren. Altså ser vi, at figuren ikke stemmer specielt overens med (9).

2.5

Vi starter med at opskrive ligning (7) og for periode t og t-1 og derefter dividere periode t med t-1:

$$\frac{y_t}{y_{t-1}} = (\frac{k_t}{k_{t-1}})^\alpha (\frac{A_t}{A_{t-1}})^\beta + (\frac{x_t}{x_{t-1}})^k (\frac{e_t}{e_{t-1}})^\epsilon$$

Dermed kan vi skrive $\frac{y_t}{y_{t-1}} = f_t^y = f_t^k$ og desuden kan vi skrive følgende som, $A_t/A_{t-1} = 1+g$, hvilket vi har fra ligning (4). Derudover har vi at:

$$\frac{x_t}{x_{t-1}} = \frac{X/L_t}{X/L_{t-1}} = \frac{L_{t-1}}{L_t} = \frac{1}{1+n}$$

$$\frac{e_t}{e_{t-1}} = \frac{E_t/L_t}{E_{t-1}/L_{t-1}} = \frac{s_E R_t}{s_E R_{t-1}} \frac{L_{-1}}{L_t} = \frac{1-s_E}{1+n}$$

Her benytter vi igen at $R_t = (1-s_E)R_{t-1}$, hvilket vi udledte i 2.3.
Nu samler vi så de fundne udtryk og får følgende:

$$f_t^y = (f_t^k)^\alpha (1+g)^\beta (\frac{1}{1+n})^k (\frac{1-s_E}{1+n})^\epsilon \Leftrightarrow$$

$$f_t^y = (f_t^y)^\alpha (1+g)^\beta (\frac{1}{1+n})^k (\frac{1-s_E}{1+n})^\epsilon \Leftrightarrow$$

$$(f_t^y)^{1-\alpha} = (1+g)^\beta (\frac{1}{1+n})^k (\frac{1-s_E}{1+n})^\epsilon \Leftrightarrow$$

Så ved vi at vi flytte $1-\alpha$ over på den anden og skive det som $\frac{1}{\beta+\kappa+\epsilon}$

$$f_t^y = (1+g)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa+\epsilon}}(\frac{1}{1+n})^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa+\epsilon}}(\frac{1-s_E}{1+n})^{\frac{\epsilon}{\beta+\kappa+\epsilon}} \equiv f^y$$

Dette viser nu at f_t^y er konstant fordi, $f_t^y \equiv f^y$.
For næste trin skal vi tage log på begge sider og husker at $f_t^y = lny_t - lny_{t-1}$.

$$lny_t - lny_{t-1} =$$

$$lny_t - lny_{t-1} = \frac{\beta}{\beta+\kappa+\epsilon}ln(1+g) - \frac{\kappa}{\beta+\kappa+\epsilon}ln(1+n) + \frac{\epsilon}{\beta+\kappa+\epsilon}[ln(1-s_E) - ln(1+n)]$$

Vi benytter at $g_t^y = lny_t - lnyt - 1$ og det givet hint:

$$g_t^y = \frac{\beta}{\beta+\kappa+\epsilon}g - \frac{\kappa}{\beta+\kappa+\epsilon}n + \frac{\epsilon}{\beta+\kappa+\epsilon}[n + s_E]$$

Dette giver altså udtrykket (9).

2.6

For at vise dette, benytter vi os af (7):

$$y_t = k_t^\alpha A_t^\beta x_t^\kappa e_t^\epsilon$$

Dette kan skrives som:

$$z_{t+1} = k_{t+1}^{1-\alpha} A_{t+1}^{-\beta} x_t^{-\kappa} e_t^{-\epsilon}$$

$$z_{t+1} = (\frac{k_{t+1}}{L_{t+1}})^{1-\alpha}[(1+g)A_t]^{-\beta}(\frac{X}{L_{t+1}})^{-\kappa}(\frac{E_{t+1}}{L_{t+1}})^{-\epsilon}$$

$$z_{t+1} = (\frac{sY_t + (1+\delta)K_t}{(1+n)L_t})^{1-\alpha}[(1+g)A_t]^{-\beta}(\frac{X}{(1+n)L_t})^{-\kappa}(\frac{s_E R_{t+1}}{(1+n)L_t})^{-\epsilon}$$

$$z_{t+1} = (\frac{1}{1+n})^{1-\alpha-\kappa-\epsilon}(\frac{1}{1+g})^{\beta}(sy_t + (1-\delta)k_t)^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa}(\frac{s_E(1-s_E)R_{t+1}}{L_t})^{-\epsilon}$$

$$z_{t+1} = (\frac{1}{(1+n)(1+g)})^{\beta}(1-s_E)^{-\epsilon}(sy_t + (1-\delta)k_t)^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa}(\frac{E_t}{L_t})^{-\epsilon}$$

$$z_{t+1} = (\frac{1}{(1+n)(1+g)})^{\beta}(1-s_E)^{-\epsilon}(s\frac{y_t}{k_t} + (1-\delta))^{1-\alpha} k_t^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} e_t^{-\epsilon}$$

Vi ved at $k_t^{1-\alpha} A_t^{-\beta} x_t^{-\kappa} e_t^{-\epsilon} = z_t$:

$$z_{t+1} = (\frac{1}{(1+n)(1+g)})^{\beta}(1-s_E)^{-\epsilon}(\frac{s}{z_t} + (1-\delta))^{1-\alpha} z_t$$

$$z_{t+1} = (\frac{1}{(1+n)(1+g)})^{\beta}(1-s_E)^{-\epsilon}(s + (1-\delta)z_t)^{1-\alpha} z_t^{\alpha}$$

2.7

Først sætter vi $z_t = z_{t+1} = z$ i (11), hvilket giver:

$$z^{1-\alpha} = (\frac{1}{(1+n)(1+g)})^{\beta}(1-s_E)^{-\epsilon}(s+(1-\delta)z_t)^{1-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$z = (\frac{1}{(1+n)(1+g)})^{\frac{\beta}{1-\alpha}}(1-s_E)^{-\frac{\epsilon}{1-\alpha}}(s+(1-\delta)z_t) \Leftrightarrow$$

$$z(1-(\frac{1}{(1+n)(1+g)})^{\frac{\beta}{\beta+\kappa+\epsilon}}(1-s_E)^{-\frac{\kappa}{\beta+\kappa+\epsilon}}(1-\delta)) = (\frac{1}{(1+n)(1+g)})^{\frac{\beta}{\beta+\kappa+\epsilon}}(1-s_E)^{-\frac{\epsilon}{\beta+\kappa+\epsilon}}s \Leftrightarrow$$

$$z\frac{[(1+n)(1+g)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa+\epsilon}} - (1-s_E)^{-\frac{\kappa}{\beta+\kappa+\epsilon}}(1-\delta)]}{[(1+n)(1+g)^{\frac{\beta}{\beta+\kappa+\epsilon}}]} = (\frac{1}{(1+n)(1+g)})^{\frac{\beta}{\beta+\kappa+\epsilon}}(1-s_E)^{-\frac{\epsilon}{\beta+\kappa+\epsilon}}s \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{(1-s_E)^{-\frac{\kappa}{\beta+\kappa+\epsilon}}}{[(1+n)(1+g)]^{\frac{\beta}{\beta+\kappa+\epsilon}} - (1-s_E)^{-\frac{\kappa}{\beta+\kappa+\epsilon}}(1-\delta)}s \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{1}{[(1+n)(1+g)]^{\frac{\beta}{\beta+\kappa+\epsilon}}(1-s_E)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa+\epsilon}} - (1-\delta)}s \equiv z^*$$

Dermed har vi fundet (12). For konvergens af z_t til z^* skal vi angive følgende egenskaber af transitionskurven (11).

- Kurven er overalt strengt voksende.
- Der er en unik strengt positiv skæring mellem transitionskurven og 45 graders-linjen. Dette viste vi ovenover, eftersom at $z^* > 0$.
- For $z_t = 0$ vil $z_{t+1} = 0$, hvilket betyder at kurven ville passere gennem punktet (0,0).
- Kurven har en strengt positiv hældning ved nul. Dette ser vi ved at differentiere (11):

$$\frac{dz_{t+1}}{dz_t} = (\frac{1}{(1+n)(1+g)})^{\beta}(1-s_E)^{-\epsilon}[(1-\alpha)(s+(1-\delta)z_t)^{-\alpha})(1-\delta)z_t^{\alpha} + (s+(1-\delta)z_t)^{1-\alpha}\alpha z_t^{\alpha-1}]$$

Dermed ser vi at, når $z_t \to 0$ så vil $\frac{dz_{t+1}}{dz_t} \to \infty$ grundet $z_t^{\alpha-1}$. Det følger dermed af disse egenskaber z_t konvergere mod z^* for $z_0 > 0$.

2.8

For de vestlige lande hvor population væksten er under kontrol, vil følgende paramtere kunne gøre sig gældende. $g = 0.024, n = 0.01, s_E = 0.005$. Derned vil (9) blive:

$$g^y = 0.75 \cdot 0.024 - 0.25 \cdot 0.01 - 0.125 \cdot 0.005 = 0.0149 \rightarrow 1.49 pct.$$

Dette er en rimelig langsigtet vækst rate for indkomst per arbejder.
Det negative ved dette er dog, at alle formlerne angivet var udledet under antagelsen fra Cobb-Douglas produktion funktionen, som indeholder den antagelsen om elasticitet af substitution mellem input.
Det er vigtigt for konklusionen omkring vækst optimisme eller pessimisme, hvor kraftig det teknologiske vækst kan substituerer væk fra olie og kul og over til vedvarende energi som fx vind og sol. Dvs. at hvis vi nemt kan substituere over til vedvarende energi, vil der fortsat være vækst på den lang sigt. Dog hvis substitutions elasticitet er så lille (lig 0), så vil vi på lang sigt ingen vækst have grundet manglende ressourcer for at skabe energi. Dermed vil indkomst per arbejder gå mod nul.
Men alt i alt, lyder det rimelig at der er mulighed for at kunne substituere over til vedvarende energi og dermed lyder det også rimelig at benytte Cobb-Douglas produktion funktions antagelsen, som bruges på baggrund af de udledte af formlerne.