Mat B, 6.aflevering

ldg790 - Christian B. Gustafson

uge 13-2020

Opgave 1

Betragt matricerne A og B givet ved

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ og } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Udregn matrixprodukterne AB og BA

$$AB = \begin{pmatrix} (-2+1) & (-2-2) & (-2+1) \\ (0+1) & (0-2) & (0+1) \\ (3+4) & (3-8) & (3+4) \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Nu vil jeg udregne matrixproduktet BA:

$$BA = \begin{pmatrix} (-2+0+3) & (1+1+4) \\ (-2+0+3) & (1-2+4) \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Vis at matricen AB ikke er regulær/invertibel og ikke er symmetrisk.

For at vise at matricen AB ikke er regulær skal vi finde determinanten og vise at $|AB| = 0$

$$|AB| = -1(-14+5) + 4(7-7) - 1(-5+14) = 9 + 0 - 9 = 0$$

Da, $|AB| = 0$ så er matricen ikke regulær.

Nu viser jeg at den ikke er symmetrisk:

For at matricen er symmetrisk så skal den opfylde betingelsen: $A' = A$ Så nu finder vi den transponerende matrice A':

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & 7 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 7 \\ -4 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Vi kan nu se at $A' \neq A$ Hvilket betyder at den ikke er symmetrisk, fordi de korresponderende elementer ikke er lig hinanden.

3) Vis, at matricen **BA** er regulær og bestem den inverse matrix $(\mathbf{BA})^{\mathbf{-1}}$

Benytter samme metode for at vise at matricen er regulær:

$$|BA| = 3 - 6 = -3 \tag{1}$$

Da $|BA| \neq 0$ så er matricen regulær.

Nu bestemmes den inverse matrix:

$$(BA)^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right], R_1 \cdot (-1) + R_2 \to R_2 : \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right],$$

$$R_2 \cdot 2 + R_1 \to R_1 : \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right], R_2 \cdot (-\frac{1}{3}) : \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right],$$

Dvs.

$$(\mathbf{BA})^{\mathbf{-1}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

4) Vis, at matricen **BA** har egenværdierne $2 + \sqrt{7}$ og $2 - \sqrt{7}$ λ er en egenværdi af A hvis: $det(\lambda I_n - A) = 0$

$$det(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix})$$

$$det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -6 \\ -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 3) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - \lambda + 3 - 6$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 3$$

Nu benytter jeg følgende formel for at finde egenværdierne:

$$\lambda^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{2^2 \cdot 7}}{2} = \frac{2 \cdot 2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = \frac{2(2 \pm \sqrt{7})}{2} = \frac{2}{2}(2 \pm \sqrt{7})$$

Dvs. Egenværdierne for matricen **BA** er: $\underline{\underline{\lambda = 2 + \sqrt{7}}}$ og $\underline{\underline{\lambda = 2 + \sqrt{7}}}$

5) Vis, at matrixproduktet **B′B** ikke er en regulær matrix. Først finder

jeg den transponerende matrix ved:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nu finder jeg matrixproduktet:

$$B'B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B'B = \begin{pmatrix} (1+1) & (1-2) & (1+1) \\ (1-2) & (1+4) & (1-2) \\ (1+1) & (1-2) & (1+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vi kan se at række 1 og 3 er ens, hvilket betyder at determinanten er lig nul. Dvs. matrixproduktet ikke er en regulær matrix

6) Vis, at $\lambda = 0$ er en egenværdi for **B′B**

$$det(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 5 & 1 \\ -2 & 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda - 2((\lambda - 5) \cdot (\lambda - 2) - 1) - 1((\lambda - 2) + 2) - 2(1 + 2(\lambda - 5))$$

$$= \lambda - 2(\lambda^2 - 2\lambda - 5\lambda + 9) - \lambda - 2(1 + 2\lambda - 10)$$

$$= \lambda - 2\lambda^2 + 4\lambda + 10\lambda - 18 - \lambda - 2 - 4\lambda + 20$$

$$= -2\lambda^2 + 10\lambda$$

$$= \lambda(-2\lambda + 10)$$

Dvs. udfra ovenstående resultat, skal så: $\lambda = 0, \lambda = 5$ Dermed har vi vist at lambda =0 er en egen værdi.

7) Bestem egenvektorernde hørende til egenværdien $\lambda = 0$ for $\mathbf{B'B}$.

$$\begin{pmatrix} 0-2 & 1 & -2 \\ 1 & 0-5 & 1 \\ -2 & 1 & 0-2 \end{pmatrix}$$

Så omformer jeg matrixen ved hjælp af rækkeoperationer til echelonmatricen:

$$R_1 \cdot (-1) + R_3 \to R_3 : \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_2 \cdot 2 + R_1 \to R_2 : \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \cdot \frac{1}{9} + R_1 \to R_2, R_2 \cdot (-\frac{1}{9}), R_1 \cdot (-\frac{1}{2}) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dvs. vores egenvektor hørende til egenværdien $\lambda = 0$ er:

$$x_1 + x_3 = 0 \to x_1 = -x_3 = \text{ og } x_2 = 0$$

$$x_3 = s = 1$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = span \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$