7.Aflevering, Makro 1

ldg790 - Christian B. Gustafson

November 2020

Opgave 1

1.1

Det der bestemmer niveau og hældning for ss-vækstbanen for BNP per arbejder er således: Vækstraten i arbejdsstyrken (n), vækstraten (g), for arbejdsudvidende teknologivariabel, nedslidningsraten for kapital, initialværdien (A_0) (δ), bruttoopsparing (s), for samme samt en teknisk paramter fra cobb-douglas-produktionsfunktionen som er outputelasticiteten (alpha) mht. kapital. Vækstbanens niveau er højere desto større forholdet er mellem $\frac{s}{(n+g+\delta)}$ er, og jo større (A_0) er. Vækstraten langs banen er g.
fortolkningen af $\frac{s}{(n+g+\delta)}$ er, at kapital per effektiv arbejder bliver bestem af forholdet, fordi at kapital kommer fra (s) bruttopsparing minus nedslidning (delta), mens vækst i antal mand betyder, at der kommere flere arbejdere målt i effektivitetsenheder ind og deles om kapitalen. Desto mere kapital per effektiv arbejder der er, desto mere trækker prodktionen per effektiv arbejder opad. Teknologiniveauet (A_0) er også afgørenmde for produktionsniveau per mand, og vækst i formåen over tid skaber øget produktion per mand.
Formlen for for ss-vækstbanen kan skrives som:

$$y_t^* = A_0(1+g)^t(\frac{s}{n+g+\delta+ng})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

1.2

Vi ved at for BNP per arbejder vil y_t konvergere mod ss-vækstbanen y_t^* efter T tid. Dermed vil det formodes at den gennemsnitlige vækstrate i BNP per arbejder fra år 0 til år T er er lig med g, som er vækstraten langs med banen, plus et tillæg for konvergens mod banen, hvilket er større, desto længere under banen, BNP per arbejder ligger initial og numerisk mindre, desto flere år der observeres.

Desuden forventer vi en højere gennemsnitlig vækst, desto højere banen ligger. Altså jo større A_0 og $s/(n+g+\delta)$ er, desto mindre vil y_0 være.

1.3

Estimationen indikerer at den gennemsnitlige vækstrate i BNP per arbejder er større, desto større $lns^i - ln(n^i + 0.075)$ er. $g+\delta$ er sat til 0.075 for alle lande og desto mindre må lny_0^i være. Hvis der skal være overensstemmelse med solow-modellens konvergensegenskaber, kan det antages at A_0 og g og g+delta, har været konstant på tværs af de observeredes lande, med undtagelse for usymmetrisk udsving, dermed viser dette, at stor afstand til ss har trukket op i væksten.

Opgave 2

2.1

Vi tager udgangspunkt i (C1) og dividere med L_t på beggesider:

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{L_t} \Leftrightarrow$$

$$y_t = \frac{K_t^\alpha}{L_t^\alpha} = k_t^\alpha \tag{1}$$

Så tager vi fat i (C2) og dividere med L_{t+1} på begge sider, hvor vi på højre side benytter (C3) udtrykket:

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}(sy_t + k_t)$$

Indsætter det fundne udtryk i (1) og indsætter:

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}(sk_t^\alpha + k_t)$$

Dermed får vi det ønskede udtryk.

2.2

Vi starter med at trækker k_t fra på begge sider af (C4).

$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}(sk_t^\alpha + k_t) - k_t \Leftrightarrow$$

$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}(sk_t^\alpha + k_t) - \frac{k_t(1+n)}{1+n} \Leftrightarrow$$
$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}(sk_t^\alpha + k_t - (1+n)k_t) \Leftrightarrow$$
$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}(sk_t^\alpha + k_t - k_t - nk_t) \Leftrightarrow$$
$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}(sk_t^\alpha - nk_t)$$

Betingelsen for at der er konstant kapitalintensitet er, $k_{t+1} = k_t$, hvilket er ensbetydende med at $sk_t^\alpha = nk_t$ Dvs.

$$k_t^{\alpha-1} = \frac{n}{s} \Leftrightarrow$$

$$k_t = (\frac{n}{s})^{\frac{1}{\alpha-1}} \Leftrightarrow (\frac{s}{n})^{\frac{1}{1-\alpha}} \equiv k_c^*$$

For y_c^* bruger vi at $y_t = k_t^\alpha$, dermed må ss blive:

$$y_t = k_t^\alpha = (\frac{s}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \equiv y_c^*$$

Vi får givet i opgaveteksten, at hvis kapitalen ikke går tabt, ser er det risikikorrigerede afkast givet ved, at der er taget hensyn til sandsynligheden for at kapital kan gå tabt, derfor er der så minusses med *epsilon*.
Dermed er den risikokorrigerede indkomst givet ved, $\hat{Y}_t \equiv Y_t - \epsilon K_t$ og per mand må det så gælde at, $\hat{y}_t \equiv y_t - \epsilon k_t$.
Vi benytter det givet udtryk og udregner baglæns, hvor vi dermed gerne bør få følgende resultat: $\hat{y}_c^* = (\frac{s}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \epsilon(\frac{s}{n})^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Hvor vi her har brugt udtrykket ovenover for ss.

$$\hat{y}_c^* = (\frac{s}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1 - \epsilon\frac{s}{n}) = (\frac{s}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \epsilon(\frac{s}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}+1}$$
$$= (\frac{s}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \epsilon(\frac{s}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}+\frac{1(1-\alpha)}{1-\alpha}}$$
$$= (\frac{s}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \epsilon(\frac{s}{n})^{\frac{\alpha+1-\alpha}{1-\alpha}}$$
$$= (\frac{s}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \epsilon(\frac{s}{n})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Dermed får vi det ønskede resultat som vi vi ville have i starten og altså udsagnet sandt.

2.3

Hvis vi først tager udgangspunkt i (O3), så siger den at indlandets BNI (indlændingenes samlede indkomst), er lig indlandets BNP plus den internenationale risikofrie realrente plusset med risikopræmien på kapitalplacering i indandet. Dette er ganget medet netofordingerne på udlandet.
Det opnås et afkast på $\bar{r}+\epsilon$ på hver enhed af kapitalen placeret i indlandet, hvilket giver at $(\bar{r}\epsilon)F_t$ af den indenlandske skabte indkomst Y_t bliver brugt til rentebetalinger til udlængige og fragår indlændingenes national indkomst. For hver enhed af den udenlandske ejede kapital, viol indenlandsk placerede kapital tjene $\bar{r}+\epsilon$, grundet at de opnår $\bar{r}$ per enhed kapital risikofrit placeret på det internationale kapitalmarked og dermed vil de kunne placere en enhed kapital i indlandet, hvis der er kompensation for risikoen.
For ligning (O6), ser vi en arbitragebetingelse, der fortæller os, at indlænige såvel som udlændinge vil lade kapitalen strømme ind eller ud af indlandet lige indtil den indenlanske rente, $r_t = \alpha(\frac{K_t}{L_t})^{\alpha-1}$, som svarer til den internationale rente plus dækning af den ekstra risiko ved at investere i indlandet. Som eksempel, hvis $r_t < \alpha(\frac{K_t}{L_t})^{\alpha-1}$, så vi kapital strømme ud af indlandet, hvilket medfører et fald i K_t/L_t og r_t vil dermed stige.
For nationalindkomsten så kommer indlændingenes samlede indkomst fra aflønning af arbejdskraft og afkast på indlændingenes formue, V_t. Denne formue er placere i indenlandsk kapital, hvilket betyder at der på hver enhed af denne formue er placeret en risiko, epsilon. Altså, kan nationalindkomsten nu meningsfuldt defineres som: $\hat{Y}_t^n \equiv Y_t^n - \epsilon V_t$.

2.4

Jeg starter med at vise, at ligningerne (O1), (O6) og (O7) giver følgende:
Vi ved at (O1)=$y_t = k_t^\alpha$. Lignings (O6) skriver vi som: $\bar{r}+\epsilon = \alpha k_t^{\alpha-1} \Leftrightarrow (\bar{r}+\epsilon)k_t = \alpha k_t^\alpha$. For (O7) skriver vi: $w_t = (1-\alpha)k_t^\alpha$. Disse lægger vi nu sammen og får:

$$(\bar{r}+\epsilon)k_t + w_t = \alpha k_t^\alpha + (1-\alpha)k_t^\alpha = k_t^\alpha = y_t$$

Altså:

$$y_t = (\bar{r}+\epsilon)k_t + w_t$$

Fra (O3) dividere vi med L_t på begge sider og får: $y_t^n = y_t + (\bar{r}+\epsilon)f_t$. Fra (O2) ved vi, $f_t = v_t - k_t$. Disse lægger vi nu sammen og får: $y_t^n = y_t + (\bar{r}+\epsilon)(v_t - k_t) = y_t + (\bar{r}+\epsilon)v_t - (\bar{r}+\epsilon)k_t$. Ved nu at anvende (O8) så får vi:

$$y_t^n = ((\bar{r}+\epsilon)k_t + w_t) + (\bar{r}+\epsilon)v_t - (\bar{r}+\epsilon)k_t \Leftrightarrow$$

$$y_t^n = w_t + (\bar{r} + \epsilon)v_t$$

Videre skriver vi:

$$\hat{y}_t^n = y_t^n - \epsilon v_t = w_t + (\bar{r} + \epsilon)v_t - \epsilon v_t \Leftrightarrow$$

$$\hat{y}_t^n = w_t + \bar{r}v_t$$

Vi ser at nationalindkomsten per mand stammer fra afkastet på de indenlandske ressourcer per mand, hvilket er reallønnen w_t per enhed arbejdskraft plus den risikofrie internationale realrente per enhed indenlandsk ejet formue. Eftersom at indlænding og udlændinge har helt fri kapitalflows, kan de placere penge i indlandet eller på det internationale kapitalmarked. Vi ser at, hvis den indlandske realrente er højere end den internationale realrenten plus risiko, så vil placering af kapital i indlandet være bedre end international placering. Dvs. kapital strømmer ind i landet og derved reduccere grænseproduktet for kapital og dermed få den indenlandske realrente til $\bar{r} + \epsilon$

2.5

Vi ved at fra $(O6)$ at i hvilken som helst periode t, vil $\bar{r} + \epsilon = \alpha k_t^{\alpha-1}$. Dette er sikret fordi det er ind- og udstrømning af kapital. Altså, i hver periode må $k_t^{1-\alpha} = \frac{\alpha}{\bar{r}+\epsilon}$, eller at kt tilpasser sig med det samme til følgende:

$$k_t = (\frac{\alpha}{\bar{r} + \epsilon})^{\frac{1}{1-\alpha}} \equiv k^*$$

Det følger af, $y_t = k_t^\alpha$, at BNP per arbejder med det samme vil blive:

$$y_t = (\frac{\alpha}{\bar{r} + \epsilon})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \equiv y^*$$

Vi ser fra (O7), at reallønnen bliver med det samme til:

$$w^* = (1 - \alpha)(\frac{\alpha}{\bar{r} + \epsilon})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

2.6

For at vise dette, vil jeg starte med at dividere med L_{t+1} på begge sider af (O4), hvor højre sider bliver med en omskrivning af L til $(1 + n)L_t$:

$$v_{t+1} = \frac{1}{1+n}[sy_t^n + v_t]$$

Herfra indsætter vo udtrykket for y_t^n fra (O9) og bruger at $w^* = w_t$:

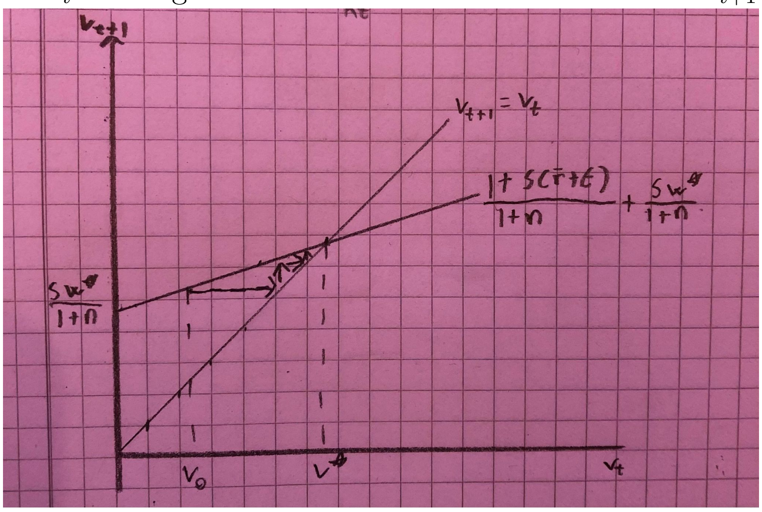
$$v_{t+1} = \frac{s[w_t + (\bar{r} + \epsilon)v_t] + v_t}{1+n}$$

$$v_{t+1} = \frac{sw_t + s(\bar{r} + \epsilon)v_t + v_t}{1+n}$$

Dette giver os så:

$$v_{t+1} = \frac{1 + s(\bar{r} + \epsilon)v_t}{1+n} + v_t + \frac{s}{1+n}w^*$$

Nedenstående figur illustrere transitionskurven i transitionsdiagrammet. Vi har at $v_{t+1} = v_t$ er en ret linje med en positiv skæring, $sw^*/1+n$. Der er en entydig, streng positiv skæring med 45 graders linjen i et $v^* > 0$, og som vi ser på trappeiterationen i figuren, at fra hvilken som helst startværdi $v_0 > 0$, vil v_t konvergere mod v^*. Vi finder v^* ved at sætte $v_{t+1} = v_t = v^*$ i (O12):



$$(1+n)v^* = [1 + s(\bar{r} + \epsilon)]v^* + sw^* \Leftrightarrow$$
$$sw^* = [n - s(\bar{r} + \epsilon)]v^* \Leftrightarrow$$
$$v^* = \frac{s}{[n - s(\bar{r} + \epsilon)]}w^* = \frac{\frac{s}{n}}{1 - \frac{s}{n}(\bar{r} + \epsilon)}w^* > 0$$

2.7

Vi benytter udtrykket (O10) for den risikokorrigerede indkomst per arbejder og indsætter den i (O13):

$$\hat{y}^{n*} = w^* + \bar{r}w^* = w^* + \bar{r}\frac{\frac{s}{n}}{[n - \frac{s}{n}(\bar{r} + \epsilon)]}w^*$$

$$= (1 + \bar{r}\frac{\frac{s}{n}}{[n - \frac{s}{n}(\bar{r}+\epsilon)]})w^* = (\frac{1 - \frac{s}{n}(\bar{r}+\epsilon) + \frac{s}{n}\bar{r}}{1 - \frac{s}{n}(\bar{r}+\epsilon)})w^*$$

$$\hat{y}^{n*} = \frac{1 - \frac{s}{n}\epsilon}{1 - \frac{s}{n}(\bar{r}+\epsilon)}w^* > 0$$

2.8

Vi starter med at indsætte i (O14) udtrykket for w^* fra (O11):

$$\hat{y}^{n*} = \frac{1 - \frac{s}{n}\epsilon}{1 - \frac{s}{n}(\bar{r}+\epsilon)}(1-\alpha)(\frac{\alpha}{\bar{r}+\epsilon})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

For at kunne sammenligne med udtrykket for (C5) gør vi følgende:

$$x \equiv \frac{\hat{y}^{n*}}{\hat{y}_c^*} = \frac{\frac{1-\frac{s}{n}\epsilon}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\epsilon)}(1-\alpha)(\frac{\alpha}{\bar{r}+\epsilon})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{(\frac{s}{n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-\epsilon\frac{s}{n})}$$

$$= (1-\alpha)(\frac{\alpha\frac{n}{s}}{\bar{r}+\epsilon})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{1}{1-\frac{s}{n}(\bar{r}+\epsilon)}$$

Nu definere vi $\alpha n/s \equiv r_c^*$ hvor at, $s/n = \alpha/r_c^*$ Dvs. at vi nu kan skrive x som:

$$(1-\alpha)(\frac{r_c^*}{\bar{r}+\epsilon})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{1}{1-\frac{\alpha}{r_c^*}(\bar{r}+\epsilon)}$$

Dermed vi vil vu definere følgende variable:

$$\hat{r} = \frac{\bar{r}+\epsilon}{r_c^*}$$

så vil x blive:

$$x = (1-\alpha)(\frac{1}{\hat{r}})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{1}{1-(\alpha\hat{r})}$$

Nu tager vi så ln på begge sider:

$$ln(1-\alpha) - \frac{\alpha}{1-\alpha}ln(\hat{r}) - ln(1-(\alpha\hat{r}))$$

Nu tager vi så den første afledte mhs. til r hat:

$$\frac{\partial \ln(x)}{\partial \hat{r}} = -\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{\hat{r}} + \frac{\alpha}{1-\alpha\hat{r}}$$

vi har nu vist at den risikokorrigerede nationalindkomst per arbejder i den åbne økonomi,er større end den risikokorrigerede indkomst per arbejder i den

lukkede økonomi. Det ser vi ved at den ovenstående ligning er nul for $\hat{r} = 1$ og er strengt voksende i $\hat{r}$, når $0 < \alpha\hat{r} < 1$. Med andre ord, så har x altså et minimum for $\hat{r} = 1$, hvor $x = 1$.
Forklaringen ville være at lande der er relativt opsparingssvage, vil på langt sigt skabe en relativ lav kapitalinensitet og dermed den relativ høj indenlandsk realrente, hvilket betyder at kapital bliver dyrere at holde på og dermed bør være mere effektiv per arbejder. Men det vil sige, at en åbning af indlandet for udlandet vil betyde frie kapitalbevægelser, og dermed vil kapital strømme ind i landet grundet den høje realrente, hvorved den indenlandske realrente så vil falde men derimod vil indenlandsk realløn stige. Afkaster på indenlandsk formue ofte betegnet, vil dermed falde fra r_c^* til $\bar{r} + \epsilon$. Dog bliver det opvejet af, at lønningerne vokser og formue vokser.