Mat B, 7.aflevering

ldg790 - Christian B. Gustafson

March 2020

Betragt følgende kvadratiske form af tre variable

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$$

(a) Bestem den symmetriske 3×3 matrix A hørende til Q

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestem alle egenværdierne for A

$$p(\lambda) = [A - \lambda I] = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 1(-(1-\lambda))$$

$$(1-\lambda)^3 - 1 + \lambda$$

$$1^3 - \lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + \lambda - 1$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$$

$$-\lambda^2\lambda + 3\lambda\lambda - 2\lambda$$

$$-\lambda(\lambda^2 + 3\lambda - 2)$$

Nu faktorisere vi først $(\lambda^2 + 3\lambda - 2)$

$$(\lambda^2 - \lambda)(-2\lambda + 2)$$

$$\lambda(\lambda-1)-2(\lambda-1)$$

Faktorisere fælles faktor $\lambda - 1$ ud

$$(\lambda-1)(\lambda-2)$$

altså får vi:

$$-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

Vi kan nu konkludere at egeværdierne er 0, 1 og 2

(c) Redegør for, at Q er positiv semidefinit

Q er positiv semidefinit når: $\lambda \geq 0, ..., \lambda_n \geq 0$

Dermed fortæller Theorem 1.7.2 at den kvadratiske form er positiv semidefinit.

(d) Bestem for hver af egenværdierne for A alle de tilhørende egenvektorer

Jeg starter med at finden egevektoren for egenværdien 0, derefter 1 og til sidst 2

$$\begin{pmatrix} 1-0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Så omformer jeg matrixen ved hjælp af rækkeoperationer til echelonmatricen:

$$R_1 \cdot (-1) + R_3 \rightarrow R_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dvs. vores egenvektor hørende til egenværdien $\lambda = 0$ er:

$$x_1 + x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -x_3 = \text{ og } x_2 = 0$$

$$x_3 = s = 1$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = span \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Nu til egenværdien 1.

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_3 + R_1 \to R_1, R_1 + R_2 \to R_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dvs. vores egenvektor hørende til egenværdien $\lambda = 1$ er:

$$x_1 = 0 \to x_3 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = span \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

Nu til egenværdien 2

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 1 \\ 0 & 1-2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Så omformer jeg matrixen ved hjælp af rækkeoperationer til echelonmatricen:

$$R_1 + R_3 \to R_3 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \cdot (-1), R_2(-1) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dvs. vores egenvektor hørende til egenværdien $\lambda = 2$ er:

$$x_1 - x_3 = 0 \to x_1 = x_3 \text{ og } x_2 = 0$$

$$x_3 = s = 1$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

(e) Bestem en ortogonal matrix P og en diagonalmatrix D, så $P^{-1}AP = D$

En reel matrix P er er ortogonal matrix, hvis søjlevektoren i P udgør et ortonormalt sæt i R^n. En $n \times n$ matrix P er ortogonal hvis og kun hvis

$$P^T P = I$$

Af denne sætning følger umiddelbart, at $P^T = P^{-1}$ Først finder jeg vores P, ved brug af egenvektorerne, vi fandt tidligere i opgaven.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nu finder vi den inverse af P, ved at udfører rækkeoperationer til reducerede echelon-form

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] R_1 + R_3 \to R_3 : \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_3 \cdot (\frac{1}{2}) : \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] R_3(-1) + R_1 \to R_1 : \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$R_1(-a) : \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Dvs.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Vores diagonale matrix D består udelukkende af vores egenværdier:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

For at tjekke om det vi har regnet frem til passer, opstiller vi følgende udtryk:

$$P^{-1}AP = D$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) & (0+0+0) & (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \\ (0+0+0) & (0+1+0) & (0+0+0) \\ (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) & (0) & (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Altså, får vi D til at være det samme som vi konkluderet tidligere. Dermed har vi bestemt en ortogonal matrix P og en diagonal matrix D, så $P^{-1}AP = D$