8.Aflevering, Makro 1

ldg790 - Christian B. Gustafson

November 2020

Opgave 1

1.1

Betinget konvergens handler om, at på langt sigt konvergere lande til en lands-bestemt vækststi. Desuden vil indkomst per arbejder konvergere betinget på strukturelle karakteristika. Dvs. at det kun gælder hvis lande er ens i strukturelle karakteristika, vil initiale indkomstforskelle forsvinde på langt sigt. Det betyder så at fattigdom - ikke nødvendigvis forsvinder automatisk på langt sigt.
Ubetinget konvergens handler om at BNP per arbejdervil på langt sigt konvergere til samme væksti for alle lande. Dvs. at alle konvergere mod samme indkomst niveau, ubetinget af evt. forskelle i de strukturelle karakteristika, såsom opsparingsrater og befolkningsvækst. Altså, at initiale forskelle i indkomst på tværs af lande automatisk forsvinder på langt sigt. Altså, vil er der til sidst ikke være fattigdom i verdenen.

1.2

Starter vi med figur 1, ser vi at der ikke er nogen ubetinget sammenhæng mellem initial indkomstniveau og efterfølgende vækst. Ved at se på $\beta_2 = -0.001$ så er denne værdi meget lille og er altså ikke signifikant forskellig fra nul. Dvs. figuren understøtter ikke hypotesen omkring ubetinget konvergens. Dog kan figur 1 heller ikke sige nok, til at lave en konklusion om betinget konvergens. Dog ved vi fra bogen kap 2, at der er stærk empirisk undersøgelse og dermed evidens for betinget konvergens i figur 1.
Nu til figur 2, som fortæller at der er en svag negativ og statistisk signifikant sammenhæng mellem initial indkomstniveau og efterfølgende vækst i perioden. Hvis vi ser på $\beta_4 = 0.005$ ser vi den signifikante sammenhæng. Dette understøtter hypotesen om ubetinget konvergens, dog kan det diskuteres om

perioden er lang nok til at lave en så hæfte konklusion. Resultatet er nok ret så følsomt overfor mere kortsigtede konjunkturbevægelser.

1.3

Vi har at sammenhængen mellem årlig vækst over en periode og de initiale indkomst niveau er givet ved:

$$\frac{lny_t - lny_0}{t} = \beta_3 - \beta_4 lny_0 \Leftrightarrow$$

$$lny_t = lny_0 + t\beta_3 - t\beta_4 lny_0 \Leftrightarrow$$

$$lny_t = t\beta_3 + (1 - t\beta_4)lny_0$$

Dvs. det vi har fundet er niveauet af BNP per indbygger i år t givet initial niveauet af BNP per indbygger i år 0. Vi skulle undersøge hvornår det fattige land har 90 pct. af indkomsten i det rige land. Altså, $lny_t^{poor} - lny_t^{rich} = 0.1$. Vi trækker ovenstående ligning for det rige land fra det fattige.

$$lny_t^{poor} - lny_t^{rich} = (1 - t\beta_4)(lny_t^{poor} - lny_t^{rich})$$

Vi indsætter værdierne og isolerer t:

$$ln0.9 = (1 - t\beta_4)ln0.1 \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{\frac{ln0.9}{ln0.1} - 1}{-\beta_4}$$

Dvs. at hvis $\beta_4 = 0.005$ får vi at t=190.8 år. Det betyder at selvom figur 2 udtrykker ubetinget konvergens, så er det dog meget en utrolig svag ubetinget konvergens.

Opgave 2

2.1

Vi tager udgangspunkt i (3) og dividere med L på begge sider:

$$y_t \equiv \frac{Y_t}{L_{YT}} = (\frac{K_t}{L_{YT}})^\alpha (\frac{H_t}{L_{YT}})^\phi (\frac{A_T L_{YT}}{L_{YT}})^{1-\alpha-\phi} \Leftrightarrow$$

$$y_t = k_t^\alpha h_t^\phi A_t^{1-\alpha-\phi} \Leftrightarrow$$

Så tager vi ln på begge sider

$$lny_t = \alpha lnk_t + \phi lnh_t + (1 - \alpha - \phi)lnA_t \Leftrightarrow$$

Benytter de givet approksimative vækstrater:

$$g_t^y \equiv lny_{t+1} - lny_t = \alpha(lnk_{t+1}lnk_t) + \phi(lnh_{t+1} - lnh_t) + (1 - \alpha - \phi)(lnA_{t+1} - lnA_t) \Rightarrow$$

$$g_t^y = \alpha g_t^k + \phi g_t^k + (1 - \alpha - \phi)\hat{g}_t$$

Vækstraten i BNP per produktionsarbejder i det tilfælde hvor de vokser med samme hastighed findes ved at sige:

$$g_t^y = g_t^k = g_t^h \Rightarrow$$

$$g_t^y = \alpha g_t^y + \phi g_t^y + (1 - \alpha - \phi)\hat{g}_t \Leftrightarrow$$
$$g_t^y - \alpha g_t^y - \phi g_t^y = (1 - \alpha - \phi)\hat{g}_t \Leftrightarrow$$
$$g_t^y(1 - \alpha - \phi) = (1 - \alpha - \phi)\hat{g}_t \Leftrightarrow$$
$$g_t^y = \hat{g}_t$$

2.2

Vi starter med at omskrive (6):

$$g_t = \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \rho A_t^{\phi - 1} L_A^{\lambda}$$

For $\phi > 1$ Her ville vækstraten i vidensniveauet være stigende i A_t. Dvs. at vækstraten vil være stigende over tid, hvilket ikke stemmer over ens med empirien, hvilket er grunden til at pensum antager $\phi \leq 1$.
For $\phi < 1$ her vil vækstraten være faldende under den givet antagelse. Antagelsen definerer den semi-endogene model fra pensum kap 9. Vi ser at hvis befolkningen er konstant, vil dette medfører nul vækst på langt sigt, hvilket betyder at vi skal bruge befolkningsvækst i den semi-endogene model, hvis altså vi gerne vil opnå vækst på langt sigt.
For $\phi = 1$ her er vækstraten konstant. Antagelsen definerer den endogene model i kap 9. Hvis befolkningen ikke er konstant, men fx følger (9) vil vi have en stigende vækst over tid.
Et argument der tæler for at phi er tæt på 1 er "Standing on schoulders". Den fortæller at der er meget nemmere at lave reggressions analyse efter computerens opfindelse.
Et argument der taler imod er "Fishing out". Den fortæller at de nemme ideer bliver bliver fundet først, så desto flere man "fisker"op desto sværer bliver det at finde nye ideer.

2.3

Jeg starter med at udlede transitionsligningen for vækstraten i vidensniveauet:

$$\frac{g_{t+1}}{g_t} = \frac{\rho A_t^{\phi-1} L_{A_t}^{\lambda}}{\rho A_{t+1}^{\phi-1} L_{A_t+1}^{\lambda}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{g_{t+1}}{g_t} = (\frac{A_t}{A_{t+1}})^{\phi-1}(\frac{L_{A_t}}{L_{A_t+1}})^{\lambda} \Leftrightarrow$$

$$g_{t+1} = (1+g_t)^{\phi-1}(1+n)^{\lambda}$$

Nu finder vi ss-værdien:

$$1 = (1+g_{se})^{\phi-1}(1+n)^{\lambda} \Leftrightarrow$$

$$g_{se} = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1 \Leftrightarrow$$

Vi ser at hvis phi=1 og antallet af vidensarbejder vokser over tid, vil det medfører en stigende vækstrate i vidensniveauet dermed findes der ikke en ss for vækstraten.

2.4

Jeg starter med at tage udgangspunkt i (4) og omskriver denne:

$$K_{t+1} - K_t = s_K Y_t - \delta K_t \Leftrightarrow$$

$$K_{t+1} = s_K Y_t + (1-\delta) K_t \Leftrightarrow$$

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} = s_K \frac{Y_t}{A_t L_t} + (1-\delta)\frac{K_t}{A_t L_t} \Leftrightarrow$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g_t)}(s_K \tilde{y}_t + (1-\delta)\tilde{k}_t) \Leftrightarrow$$

Nu indsætter vi per effektiv produktionsarbejder produktionsfunktionen:

$$\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\phi}$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g_t)}(s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta)\tilde{k}_t)$$

Nu viser vi for human kapital pr. efektiv produktionsarbejder. Her gør vi det samme som ovenover.

$$H_{t+1} - H_t = s_H Y_t - \delta H_t \Leftrightarrow$$

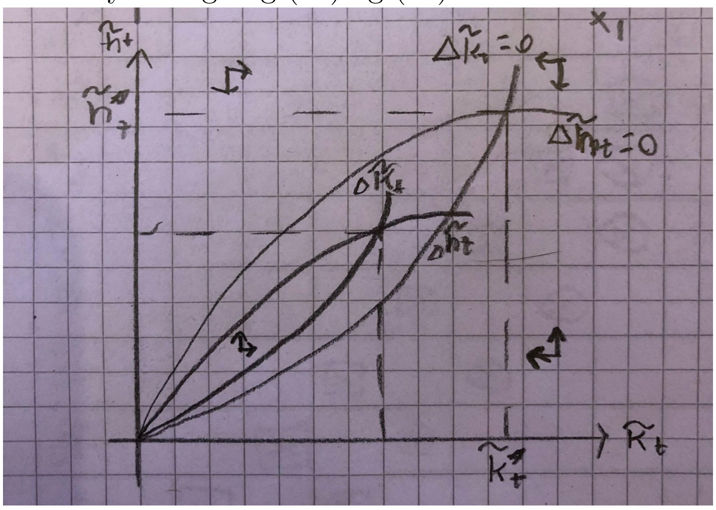
Her er stepsne de samme og vi ender altså med at få:

$$\tilde{h}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g_t)}(s_K\tilde{h}_t + (1-\delta)\tilde{h}_t) \Leftrightarrow$$

Eftersom vi arbejder med variable skaleret med antallet af produktionsarbejdere har s_R ingen påvirkning på $\tilde{h}_t$. Ved at se på produktionsfunktionen (3), viser den konstant skallafkast hvilket bekræfter at der ingen påvirkning er.

2.5

Grafen nedenunder illustrer hvor kapital per effektiv produktionsarbejder og human kapital per effektiv produktionsarbejder udvikler sig over tid, hvor vi har benytter ligning (14) og (15):



Vi finder nu SS værdien for BNP per produktionsarbejder ved at tage udgangspunkt i (14):

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g_t)}(s_K\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta)\tilde{k}_t)$$

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g_t)}(s_K\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta)\tilde{k}_t) - \tilde{k}_t$$

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g_t)}(s_K\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi} + (1-\delta)\tilde{k}_t - (1+n)(1+g_t)\tilde{k}_t)$$

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g_t)}(s_K\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi} - (\delta + g_t + n + ng_t)\tilde{k}_t)$$

SS vil dermed blive:

$$s_K\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi} = (s_K\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\phi} - (\delta + g_{se} + n + ng_{se})\tilde{k}_t \Leftrightarrow$$

$$\frac{s_K(1-s_R)^{1-\alpha}}{\delta+g_{se}+n+ng_{se}}\tilde{h}^{\phi}=\tilde{k}^{1-\alpha}$$

Vi gør det samme for ligning (15) og vi får dermned:

$$\frac{s_H}{\delta+g_{se}+n+ng_{se}\tilde{k}^{\alpha}}=\tilde{h}^{1-\phi}$$

$$(\frac{s_H}{\delta+g_{se}+n+ng_{se}\tilde{k}^{\alpha}})^{\frac{1}{1-\phi}}=\tilde{h}$$

Dette indsætter vi nu ovenfor:

$$\frac{s_K}{\delta+g_{se}+n+ng_{se}}(\frac{s_H}{\delta+g_{se}+n+ng_{se}\tilde{k}^{\alpha}})^{\frac{\phi}{1-\phi}}=\tilde{k}^{1-\alpha}$$

$$\frac{s_K^{1-\alpha}}{\delta+g_{se}+n+ng_{se}}(\frac{s_H^{1-\alpha}}{\delta+g_{se}+n+ng_{se}})^{\frac{\phi}{1-\phi}}\tilde{k}^{\alpha\frac{\phi}{1-\phi}}=\tilde{k}^{1-\alpha}$$

$$(\frac{1}{\delta+g_{se}+n+ng_{se}})^{1+\frac{\phi}{1-\phi}}s_H^{\frac{\phi}{1-\phi}}s_K=\tilde{k}^{\frac{(1-\alpha)(1-\phi)-\alpha\phi}{1-\phi}}$$

$$(\frac{1}{\delta+g_{se}+n+ng_{se}})^{\frac{1}{1-\phi}}s_H^{\frac{\phi}{1-\phi}}s_K=\tilde{k}^{\frac{1-\alpha-\phi}{1-\phi}}$$

$$(\frac{s_H^{\phi}s_K^{1-\phi}}{\delta+g_{se}+n+ng_{se}})^{\frac{1}{1-\phi-\alpha}}=\tilde{k}$$

Dermed kan vi indsætte k og h i y eftersom at vi ved at:

$$\tilde{y}^*=\tilde{k}^{\alpha}\tilde{h}^{\phi}\Leftrightarrow$$

$$\tilde{y}^*=(\frac{s_K}{\delta+g_{se}+n+ng_{se}})^{\frac{\alpha}{1-\phi-\alpha}}(\frac{s_H}{\delta+g_{se}+n+ng_{se}\tilde{k}^{\alpha}})^{\frac{\phi}{1-\phi}}$$

2.6

Vi starter med at kombinerer følgende:

$$\hat{y}_t^*L_t=y_t^*L_{Yt}$$

$$\hat{y}_t^*=y_t^*\frac{L_{Yt}}{L_t}$$

$$\hat{y}_t^*=y_t^*(1-s_R)$$

Desuden ved vi at $\tilde{y}A_t\equiv y_t^*$, hvilket vi nu indsætter:

$$\hat{y}_t^*=\tilde{y}A_t(1-s_R)$$

Nu kan vi finde A_t i ss-vækstbanen

$$g_{se} = \rho A_t^{\phi-1}(s_R L_t)\lambda \Leftrightarrow$$

$$A_t = \frac{\rho}{g_{se}}^{\frac{1}{1-\phi}} s_{Rt}^{\frac{\lambda}{1-\phi}} L_t^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

Indsætter nu $L_t = (1+n)^t L_0$

$$A_t = \frac{\rho}{g_{se}}^{\frac{1}{1-\phi}} s_{Rt}^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (1+n)^t L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

Vi benytter os af at $g_{se}(1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1 \Leftrightarrow (1+n) = (1+g_{se})^{\frac{1-\phi}{\lambda}}$

$$A_t = \frac{\rho}{g_{se}}^{\frac{1}{1-\phi}} s_{Rt}^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (1+g_{se})^t L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

Dette indsætter vi i $\tilde{y}_t^*$:

$$\hat{y}_t^* = \tilde{y} \frac{\rho}{g_{se}}^{\frac{1}{1-\phi}} s_{Rt}^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (1+g_{se})^t L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}} (1-s_R)$$

Dette er ss-vækstbanen for BNP per indbygger, hvor $\tilde{y}^*$ er givet i (16)
Hvis vi øger s_R ser vi to effekter 1. Fra $(1-s_R)$: negativ, fordi at der er færre arbejder i produktionssektoren.
2. Fra $s_R^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$: positiv firdu at der er flere arbejdere i RandD-sektoren. Dette medfører at vidensniveauet øges
Vi kan dermed finde en Golden Rule for s_R ved at tage ln til vækstbanen og differentiere mht. s_R og sæt denne lig nul:

$$ln(\hat{y}_t^*) = ln\tilde{y} + ln(\frac{\rho}{g_{se}}^{\frac{1}{1-\phi}}) + \frac{\lambda}{1-\phi} ln(s_R) + ln((1+g_{se})^t L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}}) + ln(1-s_R)$$

$$\frac{\partial \hat{y}_t^*}{\partial s_R} = -\frac{1}{1-s_R} + \frac{\lambda}{1-\phi}\frac{1}{s_R} = 0$$

$$\frac{1}{1-s_R} = \frac{\lambda}{1-\phi}\frac{1}{s_R}$$

$$s_R = (1-s_R)\frac{\lambda}{1-\phi} \Leftrightarrow$$

$$(\frac{1-\phi+\lambda}{1-\phi})s_R = \frac{\lambda}{1-\phi} \Leftrightarrow$$

$$s_R = \frac{\lambda}{1-\phi+\lambda}$$

Vi ser dermed at forskningsandelen er stigende i phi, hvilket betyder, at der altid er behov for flere forsker i økonomien når phi stiger i værdi. Det skyldes netop at "standing-on-shoulder effekten"er stærkere for et højere phi.

2.7

De semi-endogende modeller forudsiger følgende:

- Højere befolkningsvækst medfører mere vækst i indkomsten i ss.
- Højere befolkningsniveau medførere højere indkomstniveau i ss. For de endogene modeller følger det:
- Højere befolkningsvækst medfører eksplosiv vækst. Dette er dog meget urealistisk og vi antager dermed at n=0 i de endogene modeller.
- Højere befolkningsniveau medfører mere vækst i indkomsten i ss.

Der er ikke meget evidens for disse forudsigelser i tvær-lande empirien. Dette kan dog blot betyde at viden kan flyde frit på tværs af lande og modellen kommer dermed aldrig til at bruges som et skud på økonomisk vækst og velstand på tværs af lande. Hvis verdenen sås som et stort land, er det noget som tyder på at støtte til ”Højere befolkningsniveau medfører mere vækst i indkomsten i ss.