Mat B, 8.aflevering

ldg790 - Christian B. Gustafson

March 2020

2.1.5

(a) Find the directional derivative of

$$f(x, y, z) = xyln(x^2 + y^2 + z^2)$$

at (1, 1, 1) in the direction given by the vector from the point (3, 2, 1) to the point (-1, 1, 2). Vi starter med at finde vektoren fra det ene punkt til det

andet punkt ved:

$$(-1, 1, 2) - (3, 2, 1) = (-4, -1, 1) = \vec{v}$$

Dernæst finder vi "unit"vektoren til den fundene retning: først finder jeg følgende;

$$|\vec{v}\,| = \sqrt{16 + 1 + 1}$$

Nu til "unit"vektoren:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}\,|} = (\frac{-4}{\sqrt{18}}, \frac{-1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}})$$

Nu finder jeg følgende:

$$D_{\vec{u}}\,f(1, 1, 1) = \vec{\nabla}\,f(1, 1, 1) \cdot \vec{u}$$

Så finder vi gradianten af vores funktion, ved først at differentere med hensyn til x, dernæst y og så z

$$\vec{\nabla}\,f = f'_x, f'_y, f'_z$$

$$f'_x = y((x)'ln(x^2 + y^2 + z^2) + x(ln(x^2 + y^2 + z^2))')$$

$$= y(1 \cdot ln(x^2 + y^2 + z^2) + x \cdot (ln(u))'), u = x^2 + y^2 + z^2, u' = 2x$$

$$= y(1 \cdot ln(x^2+y^2+z^2) + x \cdot \frac{1}{u} \cdot 2x$$
$$= yln(x^2+y^2+z^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2+z^2})$$

Nu differentiere vi med hensyn til y

$$f'_y = x((y)'ln(x^2+y^2+z^2) + y(ln(x^2+y^2+z^2))')$$
$$= xln(x^2+y^2+z^2) + \frac{2y^2x}{x^2+y^2+z^2}$$

Nu til z

$$f'_z = xy(ln(x^2+y^2+z^2))'$$
$$= xy \cdot \frac{1}{u} \cdot 2z = \frac{2xyz}{x^2+y^2+z^2}$$

Nu kan vi vende tilbage til gradianten:

$$\vec{\nabla} f = (yln(x^2+y^2+z^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2+z^2}), xln(x^2+y^2+z^2) + \frac{2y^2x}{x^2+y^2+z^2},$$
$$\frac{2xyz}{x^2+y^2+z^2})$$

Nu kan vi gøre følgende:

$$\vec{\nabla} f(1,1,1) = ((1)ln(1^2+1^2+1^2) + \frac{2(1)^2(1)}{1^2+1^2+1^2}), (1)ln(1^2+1^2+1^2)$$
$$+\frac{2(1)^2(1)}{1^2+1^2+1^2}, \frac{2(1)(1)(1)}{1^2+1^2+1^2})$$
$$= (ln(3) + \frac{2}{3}, ln(3) + \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

Til sidst kan vi finde følgende:

$$D_{\vec{u}} f(1,1,1) = (ln(3) + \frac{2}{3}, ln(3) + \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \cdot (\frac{-4}{\sqrt{18}}, \frac{-1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}})$$
$$= \frac{-4(ln(3)+\frac{2}{3}) - 1(ln(3)+\frac{2}{3}) + 1(\frac{2}{3})}{\sqrt{18}} = \underline{\underline{\frac{-(5ln(3)+\frac{8}{3})}{\sqrt{18}}}}$$

(b) Determine also the direction of maximal increase from the point (1, 1, 1).
Ved (1,1,1) vil retningen for hurtigste vækst for f være givet ved:

$$\nabla f(1,1,1) = (ln(3) + \frac{2}{3}, ln(3) + \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

Opgave 2

Betragt flg. funktioner defineret på $s = (x, y) \in R^2 : x > 0, y > 0$:

$$f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$g(x, y) = \sqrt{x + y}$$

$$h(x, y) = \sqrt{x + y} + \sqrt{y}$$

Afgør for hver funktion, om den er konkav, og om den er strengt konkav.

Jeg start med af differentiere f

$$f_1' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f_{11}'' = \frac{1}{2}(x^{-\frac{1}{2}})' \rightarrow \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}) = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_2' = \frac{1}{2\sqrt{y}}, f_{22}'' = \frac{1}{2}(y^{-\frac{1}{2}})' \rightarrow \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}) = -\frac{1}{4y^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{12}'' = 0$$

For at funktionen skal vær konkav skal det gælde at:

$$f_{11}'' \leq 0, f_{22}'' \leq 0 \text{ og } f_{11}''f_{22}'' - (f_{12}'')^2 \geq 0$$

Vi ser netop at for både x og y at;

$$f_{11}'' \leq 0, f_{22}'' \leq 0$$

Desuden ser vi også at ganger man de to negative tal sammen får man plus derfor må det gælde at:

$$f_{11}''f_{22}'' - (f_{12}'')^2 \geq 0$$

Dermed har vi vist at den er konkav, og for at den er strengt konkav må der gælde at:

$$f_{11}'' < 0 \text{ og } f_{11}''f_{22}'' - (f_{12}'')^2 > 0$$

Dette er også tilfældet for f og dermed må f også være streng konkav.

Videre til g, som ligner f rigtig meget og vi benytter os af samme strategi når vi skal differentiere.

$$g_1' = \frac{1}{2\sqrt{x + y}}, g_{11}'' = -\frac{1}{4(x + y)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

$$g_2' = \frac{1}{2\sqrt{x + y}}, g_{22}'' = -\frac{1}{4(x + y)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

Her opnå mere eller mindre samme resultat som for f, dog bliver g''_{12} ikke lig 0 denne gang:

$$g''12 = -\frac{1}{4(x+y)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

$$g''_{11}g''_{22} - (g''_{12})^2 = -\frac{1}{4(x+y)^{\frac{3}{2}}} \cdot (-\frac{1}{4(x+y)^{\frac{3}{2}}}) - (-\frac{1}{4(x+y)^{\frac{3}{2}}})^2$$

$$= \frac{1}{16(x+y)^{2\cdot\frac{3}{2}}} - \frac{1}{16(x+y)^{2\cdot\frac{3}{2}}} = \frac{1}{16(x+y)^3} - \frac{1}{16(x+y)^3} = 0$$

Dermed opfylder g betingelserne for at være konkav men ikke streng konkav fordi den ikke opfylder følgende betingelse:

$$g''_{11}g''_{22} - (g''_{12})^2 > 0$$

Videre til funktionen h

$$h'_1 = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}, h''_{11} = -\frac{1}{4(x+y)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

$$h'_2 = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}, h''_{22} = -\frac{1}{4(x+y)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4y^{\frac{3}{2}}} < 0$$

$$h''_{12} = -\frac{1}{4(x+y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$h''_{11}h''_{22} - (h''_{12})^2 = -\frac{1}{4(x+y)^{\frac{3}{2}}} \cdot (-\frac{1}{4(x+y)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4y^{\frac{3}{2}}}) - (-\frac{1}{4(x+y)^{\frac{3}{2}}})^2$$

$$= \frac{1}{16(x+y)^3} + \frac{1}{16y^{\frac{3}{2}}(x+y)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{16(x+y)^3} = \frac{1}{16y^{\frac{3}{2}}(x+y)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

Dvs. funktionen h opfylder betingelserne for at være konkav samt streng konkav