9.Aflevering, Mikro 1

ldg790 - Christian B. Gustafson

November 2020

(a)

Vores er funktion er givet ved: $f(l,k) = l^a k^b$ for $a > 0, b > 0$ og prissystemet er følgende, (p, w, r). vi skal vise at løsningen til omkostningsminimeringsproblemet kan skrives som:

$$C(x, w, r) = X \cdot x^{\frac{1}{a+b}} \tag{1}$$

Vi starter dermed at opstille minimeringsproblemet

$$\min_{l,k} wl + rk \text{ u.b.b } l^a k^b = x \tag{2}$$

Vi opskriver nu lagrange-funktionen:

$$\mathcal{L}(l, k, \lambda) = wl + rk + \lambda[x - l^a k^b] \tag{3}$$

Udleder nu FOC:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l} = w - \lambda a l^{a-1} k^b \Leftrightarrow w = \lambda a l^{a-1} k^b \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = r - \lambda b l^a k^{b-1} \Leftrightarrow r = \lambda b l^a k^{b-1} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x - l^a k^b \Leftrightarrow x = l^a k^b \tag{6}$$

Vi deler nu (4) med (5):

$$\frac{w}{r} = \frac{\lambda a l^{a-1} k^b}{\lambda b l^a k^{b-1}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{w}{r} = \frac{ak}{bl} \Leftrightarrow$$

$$k = \frac{wbl}{ra} \tag{7}$$

Altså har vi utrykt k som en funktion af l. Nu indsætter vi (7) i (6)

$$x = l^a(\frac{wbl}{ra})^b \Leftrightarrow$$

$$x = l^a(\frac{w^b b^b l^b}{r^b a^b}) \Leftrightarrow$$

$$x = l^{a+b}\frac{w^b b^b}{r^b a^b} \Leftrightarrow$$

$$x\frac{r^b a^b}{w^b b^b} = l^{a+b} \Leftrightarrow$$

$$l^*(x, w, r) = (x\frac{r^b a^b}{w^b b^b})^{\frac{1}{a+b}} \tag{8}$$

Nu indsætter vi (8) i (7) for at udlede den omkostningsminimerende efterspørgsel efter l.

$$k^*(w, r, x) = \frac{wb}{ra}(x\frac{r^b a^b}{w^b b^b})^{\frac{1}{a+b}}$$

Omkostningsfunktioenen er givet ved:

$$C(x, w, r) = wl^*(x, w, r) + rk^*(w, r, x)$$

$$= w(x\frac{r^b a^b}{w^b b^b})^{\frac{1}{a+b}} + r(\frac{wb}{ra}(x\frac{r^b a^b}{w^b b^b})^{\frac{1}{a+b}})$$

$$= w(\frac{ra}{wb})^{\frac{b}{a+b}} \cdot x^{\frac{1}{a+b}} + r(\frac{wb}{ra}(\frac{ra}{wb})^{\frac{b}{a+b}}) \cdot x^{\frac{1}{a+b}}$$

$$= (w(\frac{ra}{wb})^{\frac{b}{a+b}} + r(\frac{wb}{ra}(\frac{ra}{wb}))^{\frac{b}{a+b}}) \cdot x^{\frac{1}{a+b}}$$

Hvor

$$\chi = w(\frac{ra}{wb})^{\frac{b}{a+b}} + r(\frac{wb}{ra}(\frac{ra}{wb}))^{\frac{b}{a+b}}$$

Og dermed kan vi skrive udtrykket som:

$$C(x, w, r) = \chi \cdot x^{\frac{1}{a+b}}$$

hvor χ er en konstant der netop afhænger af w,r,a og b.

(b)

Nu skal vi løse profitmaksimeringsproblemet indirekte vha. omkostningsfunktionen. Vi starter dermed at opstille maksimeringsproblemet.

$$\max_x px - C(x, w, r)$$

Nu udleder vi FOC.

$$p - MC(x, w, r) = 0 \Leftrightarrow MC(x, w, r) = p$$

Beregner nu virksomhedens marginale omkostninger.

$$MC(x) = \frac{\partial C(x, w, r)}{\partial x} = \chi \frac{1}{a+b} x^{\frac{1}{a+b}-1} = \frac{\chi x^{\frac{1-a-b}{a+b}}}{a+b}$$

Virksomhedens profitmaksimerende produktion bliver dermed:

$$\frac{\chi x^{\frac{1-a-b}{a+b}}}{a+b} = p \Leftrightarrow$$

$$x^{\frac{1-a-b}{a+b}} = \frac{p(a+b)}{\chi} \Leftrightarrow$$

$$x^*(p, w, r) = (\frac{p(a+b)}{\chi})^{\frac{a+b}{1-a-b}}$$

(c)

Vi er ikke sikre på at vi har fundet et unikt maksimum. Derfor finder vi at profitfunktionen er strengt konkav. Dermed beregner vi andenordensbetingelsen:

$$-\frac{\partial MC(x)}{\partial x} < 0 = -\frac{1-a-b}{a+b} \frac{\chi x^{\frac{1-a-b}{a+b}-1}}{a+b} < 0$$

Det fremgår at den bestemte produktion er et maksimum hvis følgende gælder:

$$-\frac{1-a-b}{a+b} < 0 \Leftrightarrow -(1-a-b) < 0 \Leftrightarrow 1-a-b > 0 \Leftrightarrow a+b < 1$$

Dvs. at $a + b < 1$ for at vi er sikre på at have fundet et maksimum.