Mat B, 9.aflevering

ldg790 - Christian B. Gustafson

April 2020

Opgave 4

Lad $S = (x, y) \in R^2 : x > 0$ og betragt funktionen f givet ved forskriften

$$f(x, y) = (x + y)^2 - 4ln(x) - 4y \text{ for alle } (x, y) \in S$$

(a) Bestem Hessematricen $f^{''}(x, y)$. Vis at f er strengt konveks.

For at f er strengt konveks, skal der gælde at:

$$f''_{11} > 0 \text{ og } f''_{11}f^{''}_{22} - (f''_{12})^2 > 0$$

Vi starter med at differentiere funktionen:

$$f'_1 = 2(x + y) - \frac{4}{x},\ f''_{11} = 2 + \frac{4}{x^2} > 0$$

$$f'_2 = 2(x + y) - 4,\ f''_{22} = 2$$

$$f''_{12} = 2$$

$$f''_{11}f^{''}_{22} - (f''_{12})^2 = (2 + \frac{4}{x^2}) \cdot 2 - (2)^2 = 4 + \frac{8}{x^2} - 4 = \frac{8}{x^2} > 0$$

Dermed opfylder f kravende for at være streng konveks når x¿0.

Hessematricen ser således ud:

$$Hesse = \begin{pmatrix} 2 + \frac{4}{x^2} & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Bestem alle globale minimumspunkter og den globale minimumsværdi for f.

Vi ved at hvis f er konveks i S, så er x* et globalt minimumspunkt for f i S hvis og kun hvis x* er et stationært punkt for f

Nu sætter vi de første ordens differentieret lig nul og løser ligningen

$$f_1' = 0 \to 2(x+y) - \frac{4}{x} = 0$$

De stationære punkter er

$$f_2' = 0 \to 2x + 2y - 4 = 0$$

Ud fra ligningen kan vi se, at hvis x og y er lig 1 går ligningerne op Dvs.$(x, y) = (1, 1)$ er det eneste globale minimumspunkt.

Dens globale minimumsværdi er:

$$f(1,1) = (1+1)^2 - 4ln(1) - 4(1) = 0$$

(c)Lad funktionerne g og h være givet ved følgende forskrifter

$$g(x,y) = \sqrt{f(x,y)} \text{ og } h(x,y) = -f(x,y) + e^{-f(x,y)} \text{ for alle } (x,y) \in S.$$

Afgør, om g er kvasikonvkes. Begrund dit svar. Afgør, om h er kvasikonkav. Begrund dit svar.

Jeg starter med at definere følgende: $f(x, y) = t$

$$k(t) = \sqrt{t}, \ t \geq 0$$

$$l(t) = t + e^t, \ t \in R$$

Det skal siges at vi i ovenstående opgave fandt frem til at $f(x, y) \geq 0$ for alle $(x, y) \in S$

$$g = k \ o \ f \text{ og } h = l \ o \ (-f)$$

Vi ved at hvis $f(x, y)$ er konveks så er $f(x, y)$ også kvasikonveks.

Des ses at den ydre funktion af K, som er kvadratroden, er en voksende funktion. Dvs. eftersom k er voksende så er g kvasikonvkes. Da f er konveks så vil den negative $-f$ være konkav, og l er voksende som vi ved fra, at funktionen e^u er voksende, så vil en funktion der er konkav også være kvasikonkav.