Arbitragefri prisfastsættelse i en-periode-binomialmodellen

Matematisk Finansiering 1
Efterår 2022

22. september

Dagens plan

- Odds og arbitrage, del 1: Burkina Faso – Mali
- En-periode-binomialmodellen: 1 periode, 2 tilstande: Hvad er en call-option værd — og hvorfor? *Risk-neutral pricing 101*. I har set det før. Men det er altså meget, meget vigtigt.
- Odds og arbitrage, del 2: Brexit og *cross-currency betting arbitrage*

Röman, bind 1 behandler dagens materiale i kapitel 2, specielt afsnit 2.1. Her følger jeg dog mestendels noternes afsnit 4.1. og en Wilmott-klumme.

Odds og arbitrage, del 1: Burkina Faso – Mali

Example 1, side 11 i noterne.

Nogle bookmakere havde sat odds på en kamp ved Africa Nations' Cup:

	Burkina Faso - Mali		
Bookmaker	1 (B F win)	X (draw)	2 (Mali win)
Aebet	5.50	3.10	1.61
Bet-at-home.com	3.65	3.20	1.75
EasyBets	4.20	3.30	1.73
Expekt	4.05	3.15	1.85
InterWetten	3.50	2.80	2.00
MrBookmaker	4.60	3.05	1.73

Vælg det bedste (dvs. det højeste) odds for hvert udfald og spil 1/odds kr. på hvert.

Det koster kun 0.9848 kr., men betaler helt sikkert 1 kr.

Det er i en nøddeskal hvad en arbitragemulighed er. En pengemaskine, *a free lunch*.

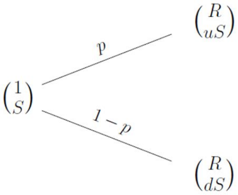
Læg mærke til, at vi hverken behøver vide noget om fodbold eller om statistik.

Nettet er fyldt med tilbud om at finde den slags den slags *surebets* (fx) – af mere eller mindre lødig kvalitet; så i praksis er tingene mere komplicerede – *such is life*.

Ikke-pensum refrerence: Franck, Verbeek & Nüesch (2013) om arbitrage i spillemarkeder.

Afsnit 4.1: En-periode-binomialmodellen

For at sige noget om, hvad optioner er er værd, starter vi med en-periode-binomialmodellen fra noternes afsnit 4.1: Aktien kan gå op til uS (ssh p) eller ned til d (ssh $1 - p$).



Bemærk strukturen: Det, vi ikke ved er, *om* aktiekursen går op eller ned. Givet den går op, ved vi hvor den lander; u og d kender vi — ligesom vi ved hvilke tal, der står på en ternings sider.

Desuden har modellen et risikofrit aktiv (bankbogen) der laver 1 kr. til R kr. (Vi skriver ofte $R = 1 + r$.)

Rygmarvseksempel: $u = 1.2$, $d = 0.9$, $R = 1.05$ (dvs. rente på 5%). (Hvorfor viser sig senere.)

En call-option giver ret, men ikke pligt, til at købe aktien på tid 1 til den på forhånd fastlagte (*strike-*, *exercise-* eller *aftale-*)kurs K; den har

$$\text{pay-off} = \max\left(S(1) - K, 0\right) = (S(1) - K)^+ = C(1).$$

Optionen kan *replikeres* ved at lave en portefølje med a stk. aktier og b kr. på bankbogen ($b < 0 \sim$ et lån) der opfylder at

$$\begin{aligned} auS + bR &= (uS - K)^+ =: C_u, \\ adS + bR &= (dS - K)^+ =: C_d. \end{aligned}$$

Det har løsningen

$$a = \frac{C_u - C_d}{S(u-d)} = \frac{\text{“}\Delta C\text{”}}{\Delta S} \text{ enheder af aktien,}$$

og $b = (C_u - auS)/R$ kr. i banken. (Man kan vise at $a \geq 0$ og $b \leq 0$.)

Optionen må (… *ellers arbitrage* …) koste det samme som den replikerende portefølje, altså $aS + b$.

Med den *risiko-neutrale sandsynlighed*

$$q = \frac{R-d}{u-d},$$

kan det udtrykkes som en diskonteret forventet værdi,

$$C(0) = \frac{1}{R}(qC_u + (1-q)C_d) = \frac{1}{R}\mathrm{E}^q(C(1)). \tag{1}$$

Ligning (1) kaldes (eller: er et eksempel på) risiko-neutral prisfastsættelse.

Mellemregning: Generel omskriving til risiko-neutral prisfastsættelse

ellers arbitrage

$$C(0) = aS + b$$

sæt a, b ind

$$= \frac{C_u - C_d}{\cancel{S}(u-d)}\cancel{S} + \frac{1}{R}\left(C_u - a u S\right)$$

$$= \frac{C_u - C_d}{u-d} + \frac{1}{R}\left(C_u - \frac{uC_u - uC_d}{u-d}\right)$$

$$= \frac{1}{R}\left(\frac{RC_u - RC_d}{u-d} + \frac{C_u(u-d)}{u-d} - \frac{uC_u - uC_d}{u-d}\right)$$

sæt på fælles brøkstreg

$$= \frac{1}{R}\left(\frac{RC_u - RC_d + \cancel{uC_u} - dC_u - \cancel{uC_u} + uC_d}{u-d}\right)$$

saml C_u, C_d-led

$$= \frac{1}{R}\left(C_u \underbrace{\frac{R-d}{u-d}}_{=:\, q \,\in\,]0;1[\text{ ellers arbitrage}} + C_d \underbrace{\frac{u-R}{u-d}}_{\text{her står så } 1-q \text{ da de to brøker lagt sammen}}\right)$$

FORTOLKNING/ REPRÆSENTATION SOM FORVENTNING

$$= \frac{1}{R} E^{q}\left(C(1)\right)$$

Mellemregning: For at replikere en call-option skal vi låne penge; $b \leq 0$

HUSK AT $a = \frac{C_u - C_d}{S(u-d)}$ og $auS + bR = C_u$

DERFOR: $b = \frac{1}{R}(C_u - auS) = \frac{1}{R}\left(C_u - \frac{C_u - C_d}{u-d}\, u\right)$ (sæt ind)

$= \frac{1}{R}\left(\frac{uC_u - dC_u}{u-d} - \frac{uC_u - uC_d}{u-d}\right)$ (gang & divider)

$= \frac{1}{R}\left(\frac{uC_d - dC_u}{u-d}\right)$ ([illegible] reducér)

Vi HAR $uC_d = u(dS-K)^+ = (udS - uK)^+$

$(u \geq d > 0,\ K > 0)$ $\leq (udS - dK)^+ = d(uS - K)^+ = dC_u$

[illegible]

HVORPÅ VI KONKLUDERER AT $b \leq 0$

Bemærkninger

Her er ligegyldigt, at det specifikt er en call-option, vi ser på; argumenterne virker for et hvliket som helst aktiv. (Også aktien og bankbogen selv.) (Vender vi tilbage hertil i afsnit 4.2.)

For at komme frem til den risiko-neutrale prisfastsættelsesformel har vi *ikke* antaget noget om risiko-neutrale investorer, kun (det meget svagere) fravær af arbitrage. Det er et ganske subtilt punkt, og noget vi vil cirkle omkring i kurset. Se side 2 i Poulsen (2017) for uddybning.

Der står ikke p nogen steder. Synes man, der er et underligt forhold mellem u, d og p, ja så er det S, man skal undre sig over, ikke optionsprisen. (Vender tilbage hertil i afsnit 4.3.)

Overraskende: $R \uparrow \Rightarrow C(0) \uparrow$ (Ex' 17)

Vi kan skrive

$$C(0) = \frac{C_u - C_d}{u - d} + \frac{C_u - auS}{R}.$$

Ved at regne som da vi viste $b \leq 0$ indser vi, at tælleren i sidste led

- ikke afhænger af R.
- er negativ.

Da første led (tydeligvis) heller ikke afhænger af R, så konkluderer vi, at hvis renten stiger, så stiger call-prisen.

Umiddelbart ville man (jeg!) tro, at med højere rente diskonteres fremtidige betalinger hårdere, og så falder call-prisen.

Grunden til call-optionsprisens positive renteafhængighed er, at vi skal låne penge for at replikere call-optionen ($b \leq 0$), og når renten stiger, så bliver det dyrere.

Morale: Der er masser af ting at lære af selv simple modeller.

Opgave: Hvordan afhænger put-optionspriser af renten?

Odds og arbitrage, del 2: Brexit

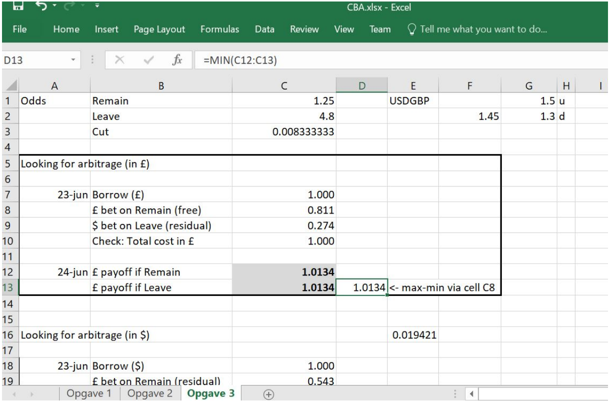
I en Wilmott-klumme ser jeg på *cross currency betting arbitrage*. Og i Hanke, Poulsen & Weissensteiner (2019). Og i eksamen november 2018.

Bookmakere sætter odds på Brexit-afstemningen 23/6 2016.

Man vælger selv hvilken valuta, man vil spille i, men/og det odds man får afhænger ikke af valutaen. (Begge dele er empirisk verificerbare.)

Pund-kursen påvirkes af afstemningens udfald. Det giver os (arbitrage-)muligheder.

Sat op in Excel:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Odds	Remain	1.25		USDGBP		1.5	u	
2		Leave	4.8			1.45	1.3	d	
3		Cut	0.008333333						
4									
5	Looking for arbitrage (in £)								
6									
7	23-jun	Borrow (£)	1.000						
8		£ bet on Remain (free)	0.811						
9		$ bet on Leave (residual)	0.274						
10		Check: Total cost in £	1.000						
11									
12	24-jun	£ payoff if Remain	**1.0134**						
13		£ payoff if Leave	**1.0134**	1.0134	<- max-min via cell C8				
14									
15									
16	Looking for arbitrage (in $)				0.019421				
17									
18	23-jun	Borrow ($)	1.000						
19		£ bet on Remain (residual)	0.543						

Algebraisk:

In Hanke, Poulsen &/Weissensteiner (2019) we go algebraic and consider a *(u,d)*-binomial model for the \$/£-exchange rate and define (in obvious notation) the bookmakers' cut *c* via

$$1/\text{odds\_L} + 1/\text{odds\_R} = 1 + c.$$

We then show that a betting arbitrage[4] can be constructed if (and only if) one of the two following (non-equivalent) conditions hold:

$$\text{(A) } 1 - c^*\text{odds\_L} > d, \qquad \text{(B) } 1 - c^*\text{odds\_R} > 1/u.$$

Hvis begge uligheder holder, kan vi lave arbitrage i begge valutaer; hvis kun den ene, så kun i den ene valuta.

Bevis (kun (A); (B) går ligesådan) på de følgende to sider.

ARBITRAGE BOUNDS

MODEL FOR FX-RATE (eg USDGBP)

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & u X(t-) \quad \text{Remain (R)} \\
X(t-) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & d X(t-) \quad \text{Leave (L)}
\end{tikzcd}
$$

$t-$ $\qquad$ t

Assume \$-odds and £-odds are the same,

ie
$$\mathrm{odds}^{\$}_R = \mathrm{odds}^{£}_R =: \mathrm{odds}_R$$
and
$$\mathrm{odd}^{\$}_L = \mathrm{odds}^{£}_L =: \mathrm{odds}_L$$

Define the bookmakers cut, c, via

$$\mathrm{odds}_R^{-1} + \mathrm{odds}_L^{-1} = 1 + c$$

PROPOSITION There is ARBITRAGE IN THIS MODEL IF (~~[illegible]~~) ONE OF THE FOLLOWING CONDITIONS HOLD

(A) $(1 - c \cdot \mathrm{odds}_L) > d$

(B) $(1 - c\,\mathrm{odds}_R) > 1/u$

PROOF Look at strategy (A):

@ time t− • borrow £1 • bet $\frac{1}{odds_R}$ on Remain at UK-bookie

• bet the rest on Leave at US-bookie ie

$\$ \left(1 - \frac{1}{odds_R}\right) X(t-)$ \$

• Cost (by construction) £1

Payoff @ t in £ • If Remain 1

• If Leave $\underbrace{\left(1 - \frac{1}{odds_R}\right)}_{= odds_L^{-1} - e} \frac{\cancel{X(t-)}}{\cancel{X(t-)}d} \times odds_L$

$1 > 1$ if $(1 - e\, odds_L) > d$

SO: IF CONDITION (A) HOLD, WE HAVE ARBITRAGE