Finansielle flerperiodemodeller: Arbitrage, martingalmål og fundamentalsætninger

Matematisk Finansiering 1
Efterår 2022

13. og 19. oktober

Plan

Tilbage til afsnit 5.2, hvor vi ser på finansielle modeller

- (S, δ, ρ): Priser, dividender, rente.
- Handelsstrategier og dividende-strømmme.
- Selvfinansiering,
- Arbitrage.
- Replikation og komplethed.
- Et konkret legetøjseksempel.

Afsnit 5.4:

- Martingalmål, Q (Def. 31) og lokalkarakterisation af disse (Thm. 4).
- Theorem 5: Selv-finansierende strategiers diskonterede værdiprocesser er Q-martingaler.
- En model er arbitragefri, hvis og kun hvis den har et martingalmål. (Thm. 6; "1st fundamental theorem of asset pricing".)
- En arbitragefri model er komplet hvis og kun hvis den har et entydigt martingalmål. (Thm. 7; "2nd fundamental theorem of asset pricing".)

Finansielle ingredienser

Prisprocesser: $(S^1, \ldots, S^N)$. (Teknisk betingelse: $S_T^i \equiv 0$ for alle i — som en lille overvejelse viser er tvingende nødvendig for fravær af arbitrage.)

Dividendeprocesser: $(\delta^1, ..., \delta^N)$. En ejer af aktiv i modtager δ_t^i på tid t. Pr. konvention er priser som ex-dividende, men/og ofte vil vi tænke på δ_T^i som S_T^i.

Diskonteringsfaktor eller bankbog:

$$R_{s,t} = (1 + \rho_s)(1 + \rho_{s+1})...(1 + \rho_{t-1}),$$

hvor ρ er en kort-rente proces. Værdien på tid t af 1 kr. sat i banken på tid s.

Afkastraten på det lokalt risikofrie aktiv mellem s og $s+1$ er kendt allerede på tid s, men mellem $s+1$ og $s+2$ er den det ikke. Formelt set defineres aktivet ved $S_t^0 \equiv 1$, $\delta_t^0 = \rho_{t-1}$. (Hvorfor?)

Disse processer er eksogent givne, men altså stokastiske.

Det viser sig ganske fikst, at vi kan klare dividender, stokastisk rente og stiafhængighed i et hug. (Det er mere besværligt i kontinuert tid.)

Handelstrategi er en N-dimensional tilpasset proces $\phi = (\phi^1, \ldots, \phi^N)$. Den lever på $t = 0, 1, \ldots, T-1$.

Fortolkning: $\phi^i_t(\omega)$ er det antal stk. af aktiv i, vi ejer på tid t. Dette er stokastisk og kan basere sig på tid-t-tilgængelig information — men "ikke mere" pr. tilpassethed.

Dividende(eller: betalings)-strømmen for en handelstrategi:

$$\delta^\phi_0 = -\phi_0 \cdot S_0 = -\sum_i \phi^i_0 S^i_0 \ \ \text{(initialt udlæg)}$$

og

$$\delta^\phi_t = \phi_{t-1} \cdot (S_t + \delta_t) - \phi_t \cdot S_t \ \ \text{for} \ \ t = 1, \ldots T.$$

Glorified bookkeeping.

En arbitrage-mulighed er en handelstrategi ϕ så

$$P(\delta^{\phi} \geq 0) = 1 \ \text{ og } \ P(\delta^{\phi} > 0) > 0,$$

eller i vektorulighedsnotation $\delta^{\phi} > 0$. Fortolkning: *A free lunch*.

En handelsstrategi er selvfinansierende mellem 0 og T hvis der gælder

$$\delta_t^{\phi} = 0 \quad \text{for } t = 1, \ldots, T-1,$$

dvs. at

$$\phi_{t-1} \cdot (S_t + \delta_t) = \phi_t \cdot S_t.$$

Fortolkning: Der skydes hverken penge ind eller trækkes penge ud imellem tid 1 og $T-1$. Men det *er* muligt at omlægge porteføljen. Og igen: Selvfinansieringsbetingelsen er egentlig bare bogholderi.

Et konkret legetøjseksempel

Opgave 1 fra MatFin1, januar 2017. *Didn't go down too well with the students.* (Men det var i nogen grad forventet.)

Spg. 1a-d er en konkret ("med tal") illustration af de finansielle begreber fra foregående slides.

Spg. 1e er numerisk verifikation af den diskonterede værdiproces for en selvfinansierende handelsstrategi er en Q-martingal — Thm. 5.

Komplethed

Komplethed defineres som at der for enhver tilpasset process, X, findes handelstrategi, ϕ hvis dividende-strøm matcher, dvs.

$$X_t = \delta_t^{\phi} \text{ for alle } t \geq 1.$$

Eller simpelthen: Alt kan replikeres.

Som ofte: Tænk over definitionen

Hva' skete der med selvfinansieringsbetingelsen?
Dette mere generelt – og for fx en call-option er den replikerende strategi efter denne definition selvfinansierende.

Hvorfor ikke "$t = 0$" i definitionen?
Vi kan ikke selv bestemme, hvad den replikerende strategi koster.

Martingalmål; Q

Sandsynlighedsmålet Q kaldes et martingalmål for modellen (S, δ, ρ) hvis

$$\widetilde{S}_t^i = \mathrm{E}_t^Q \left(\sum_{j=t+1}^{T} \widetilde{\delta}_j^i \right) \quad \text{for alle } i, t, \omega,$$

hvor $\widetilde{\cdot}$ angiver diskontering m/ bankbogen, dvs. division med $R_{0,t}$.

(Hvis man ikke lige kan se, hva' det har med *martingaler* at gøre, så skal man være undskyldt. En slides tid, ihvertfald.)

Det kan (som gjort i Thm. 4) mere nyttigt udtrykkes som at

$$S_t^i = \mathrm{E}_t^Q \left(\frac{S_{t+1}^i + \delta_{t+1}^i}{1 + \rho_t} \right) \quad \text{(altså } \forall\, i, t, \omega).$$

Dette er en lokal karakterisation; der indgør kun t og $t + 1$. Og det "lugter mere af martingal". Og det er en nyttig øvelse i regneregler for betingende middelværdier.

Hvis man arbejder i kontinuert tid, så er det væsentligt mere 'tricky' at lave en tilsvarende lokalkaraterisation. Det gør meget af MatFin2 med. (Nøgleord: Drift og volatilitet, Itos formel, parabolsk partiel differentialligning.)

For en handelsstrategi ϕ, definerer vi dens værdiproces V^ϕ via $V^\phi(t) = \phi(t) \cdot S(t)$.

Theorem 5: Enhver selvfinansierende handelsstrategis diskonterede værdiproces er en Q-martingal.

Bevis: I hånden

Theorem 6/1. fundamentalsætning: Modellen (S, δ, ρ) er arbitragefri, hvis og kun hvis den har et martingalmål Q.

Bevis: Noterne

Beviset giver og også Corollary 2: *Det er nok at tjekke alle 1-periode delmodeller.* (Men disse skal tjekkes hver for sig og behøver ikke være ens — men er det ofte mere eller mindre.)

Ved at vifte med hænderne får vi ligeledes Theorem. 7/2. fundamentalsætning: En arbitragefri model er komplet hvis og kun hvis Q er entydigt.