

Lineære renteprodukter

Matematisk Finansiering 1

15. og 21. september 2022

Lineære renteprodukter

Med dette menes produkter, vi (nogle gange lidt overraskende) kan prisfastsætte udelukkende ved hjælp af dagens nul kuponrentestruktur. Altså uden brug af en dynamisk model.

Det drejer sig specifikt om

- Forwardrenter – som naturligt leder til overvejelser om “at ride på rentekurven” og forventningshypoteser.
- Rente-swaps.

Nulkuponobligationspriser og rentestruktur; afsnit 2.2 (med lidt anden notation)

Vi lader $P(t, T)$ betegne prisen på tid t på en nulkuponobligation, der udløber på tid T .

Vi antager, at på tid t kan nulkuponobligationspriserne (eller: diskonteringskurven), dvs. funktionen

$$T \mapsto P(t, T),$$

observeres. Den kan komme fra markedet eller fra en model, men hvilken spiller ingen rolle her.

Når vi kender nul kuponobligationspriserne kan vi finde (nutids)værdien af enhver deterministisk betalingsrække;
 $PV(t) = \sum_{j=t+1}^T c_{T_j} P(t, T_j).$

Nul kuponrenter (årligt tilskrevet) med løbetid τ , $y(t, \tau)$ defineres (meget rimeligt) ved

$$P(t, t + \tau) = \frac{1}{(1 + y(t, \tau))^\tau} \Leftrightarrow y(t, \tau) = P(t, t + \tau)^{-1/\tau} - 1,$$

og $\tau \mapsto y(t, \tau)$ kaldes nul kuponrentestrukturen eller -kurven.

Forwardrenten, $f(t, T)$, er den rente, vi på tid t kan aftale på et lån, der løber imellem tid T og $T + 1$. Vi *skal* optage lånet på tid T .

For at undgå arbitrage må der gælde at

$$f(t, T) = \frac{P(t, T)}{P(t, T + 1)} - 1.$$

Bevis: På tid t : Sælg 1 T -NKO, køb $P(t, T)/P(t, T + 1)$ $(T + 1)$ -NKO, indgå en forwardlåneaftale. 0-betaling på tid 0 og T , betaling på tid $T + 1$ kendt på tid t ; sidstnævnte må derfor være 0.

Når nul kuponrentekurven er voksende (hvilket er det mest normale), så ligger forwardrenter over nul kuponrenter.

Hvis man investerer over 1 år, og nul kuponrentekurven ikke flytter sig, så får man forwardrenten som afkaststrate \rightsquigarrow “at ride på rentekurven”, se afsnit 2.6.2 i noterne.”.

Er det magisk, “en sikker vinder”? Nej, man eksponerer sig for (større) risiko. *There is no such thing as a free lunch.*

Er forwardrenter lig forventede fremtidige renter? Nej. (Af to grunde; Jensens ulighed og risiko-aversion/præmie.)

Rente-swap-kontrakter; afsnit 8.2

En swap-kontrakt beytter en betalingsrække for en anden.

En *plain vanilla* rente-swap bytter fast \leftrightarrow flydende rente på et lån.

Helt specifikt betaler en “settled in arrears payer swap:

- $y(T_i, 1)$ på tid T_{i+1} for $i = 0, 1, \dots, M - 1$. (Flydende ben. Modtager flydende.)
- $-\kappa$ på tid T_{i+1} for $i = 0, 1, \dots, M - 1$. (Fast ben. Betaler fast.)

Læg mærke til, at betalingerne på det flydende ben virkelig *er* stokastiske.

Værdier på tid $t \leq T_0$:

- Fast ben: $\kappa \sum_{i=1}^M P(t, T_i)$
- Flydende ben: $P(t, T_0) - P(t, T_M)$ pr. et replikationsargument (fra noterne). Eller i dårligere fremstillinger: Ved at bytte ud y ud med f .

Værdien af hele rente-swappen er altså

$$P(t, T_0) - P(t, T_M) - \kappa \sum_{i=1}^M P(t, T_i).$$

På indgåelsestidspkt. t sættes κ så swappen har værdi 0. Denne “fair rente” på det faste ben kaldes swap-renten,

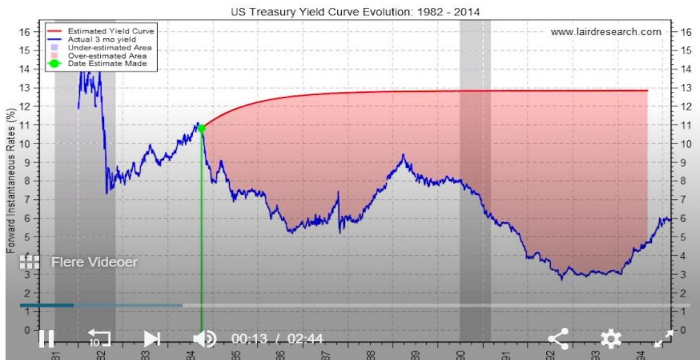
$$\kappa(t; T_1, T_M) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_M)}{\sum_{i=1}^M P(t, T_i)}.$$

Swapping horror stories

- *Proctor & Gamble vs. Bankers Trust*. Flydende rentebetaling knyttet til rente på egen anden gæld på gearet vis.
- *Danske andelsforeninger*. Det faste ben er ikke konverterbart; man hænger på at skulle betale den rente, man har lovet, i hele lånets løbetid.
- *Islandske bil- og boligkøbere, danske landmænd, tyske og østrigske kommuner i midt-00'erne*. Swappede lån fra ISK/DKK/EUR til schweizerfranc, CHF. DKKCHF-kursen gik på få år fra 4,5 til omkring 7. Og senere (15/1 2015) fra 6,2 til 7,2 på få minutter.

Renter ændrer sig over tid

På <https://tinyurl.com/y6pbwu6n> kan man finde en fin animeret illustration af, at rentekurver ændrer sig over tid:



En opgave baseret på en sand historie

Opgave 3 fra Fin1-eksamen juni 2018.

Standardobligationstyperne (serie, stående lån og annuitet) fra afsnit 2.3 skal man kende.

Underlig misforståelse — Kirsten Birgit plejede ellers at have styr på tingene i Den Korte Radioavis.

Jeg er ikke ude på at snyde jer

...

... det samme kan man ikke altid sige om alle andre.

Case in point:

Du får her en beregning af lån i ejendommen [REDACTED]
 Beregningen er lavet på F-kort, 30 år, med afdragsfrihed. Lånet er specificeret efterfølgende.

Overblik (Hovedstol 1.500.000)

Ydelse pr. år 1. år før skat	8.984
Ydelse pr. år 1. år efter skat	8.541
Heraf afdrag pr. år 1. år	7.082

Gennemsnitlige årlige omkostninger i procent udgør før skat 0,18% og efter skat 0,16%.