Mat, aflevering 10

ldg790 - Christian B. Gustafson

28/11-2019

Opgave 2 fra prøveeksamen E2018 (tilpasset nyt pensum)

Betragt funktionen f(x,y) givet ved

$f(x, y) = x^2 - y^2 + (x - y)^2$ for alle $(x, y) \in \mathbf{R^2}$

a) Bestem de partielle afledede $f_1^{'}(x, y)$ og $f_2^{'}(x, y)$

$$f_1^{'}(x, y) = 2x - 0 + 2(x - y) = 4x - 2y$$

$$f_2^{'}(x, y) = 0 - 2y + (x - y)^2$$
$$\frac{\partial}{\partial u}(u)^2 = 2u, \frac{\partial}{\partial y}(x - y) = -1$$
$$2u \cdot (-1) = -2(x - y)$$
$$f_2^{'}(x, y) = 0 - 2y - 2(x - y) = -2x$$

b) Vis, at $f(x, y)$ har netop et kritisk/stationært punkt, og bestem dette punkt.

En differentiabel funktion $f(x, y)$ kan have et maximum eller minimum ved et punkt (x_0, y_0) i dens domæne kun hvis det er et kritisk punkt - som er punktet (x, y)=(x_0, y_0), der tilfredsstiller de to ligninger:

$f_1^{'}(x, y) = 0$ og $f_2^{'}(x, y) = 0$

$$f_1^{'}(x, y) = 0 \rightarrow 4x - 2y = 0$$
$$f_2^{'}(x, y) = 0 \rightarrow -2x = 0$$

Som vi kan aflæse ud fra følgende to ligninger, så bliver x=0 og y=0. Dermed er et kritisk punkt for funktionen f; $f(0,0)$

c) Bestem alle anden-ordens partielle afledede for $f(x,y)$, og opstil Hessematricen.

$f''_{11}(x,y) = 4$ og $f''_{12}(x,y) = -2$ $f''_{21}(x,y) = -2$ og $f''_{22}(x,y) = 0$

Hesse matricen vil se således ud: $\begin{bmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

Desuden kan det Af Hesse matricen kan det ses, at $AC - B^2 < 0 \rightarrow 4 \cdot 0 - (-2)^2 = -4$,dvs at (x_0, y_0) et saddelpunkt

d) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for $f(x,y)$ gennem punktet $(1, 2, f(1,2))$.

For at bestemme ligningen, ved vi at tangentplanen $P = (x, y, f(x,y))$ er definerede som et sæt punkter (X,Y,Z) der tilfredsstiller den lineære ligning

$$Z - f(x,y) = f'_1(x,y)(X - x) + f'_2(x,y)(Y - y)$$

Hvor $X = x + dx$ og $Y = y + dy$ Vi indsætter tal i ovenstående ligning:

$$Z - (1^2 - 2^2 + (1-2)^2) = (4(1) - 2(2))(x - 1) + (-2(1)(y - 2)$$

$$Z - (-2) = 0 + (-2y + 4)$$

$$Z = -2y + 2$$

Opgave 3 fra prøveeksamen E2018

Betragt ligningen

$$e^x - 2y^2 + xy + 1 = 0$$

a) vis, at punktet $(x,y) = (0,1)$ er en løsning til ligningen.

$$e^0 - 2(1)^2 + 0 * 1 + 1 = 0 \rightarrow 1 - 2 + 1 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

Dermed er punktet (0,1) en løsning til ligningen.

b) I en omegn af $(x, y) = (0, 1)$ definerer ligningen en implicit given differentiabel funktion $y = f(x)$. Bestem differentialkvotienten y' i punktet (0,1).

$$y' = (e^x - 2y^2 + xy + 1 = 0)'$$
$$0 = e^x - 4yy' + y + x(y')$$

Begynder at isolere y'

$$e^x(-e^x) - 4yy' + y(-y) + x(y') = -e^x - y$$
$$\frac{y'(-4y + x)}{-4y + x} = \frac{-e^x - y}{-4y + x}$$
$$y' = -\frac{e^x + y}{4y + x}$$

Indsætter punktet (0,1) i y'

$$y' = -\frac{e^0 + 1}{4(1) + 0}$$
$$\underline{\underline{y' = 0.5}}$$

c) I en omegn af $(x, y) = (0, 1)$ definerer ligningen en implicit given differentiabel funktion $x = g(y)$. Bestem differentialkvotienten x' i punktet (0,1).

$$x' = (e^x - 2y^2 + xy + 1 = 0)'$$
$$e^x x' - 4y + (xy + 1)' = 0$$
$$UPS : (xy)' = x' \cdot y + x \cdot y' \rightarrow y \cdot x' + x$$
$$e^x x' - 4y + y \cdot x' + x = 0$$

Isolere nu x'

$$e^x x' + y \cdot x' = 4y - x$$
$$\frac{x'(e^x + y)}{e^x + y} = \frac{4y - x}{e^x + y}$$

$$x' = \frac{4y - x}{e^x + y}$$

Nu indsætter jeg punkterne (0,1).

$$\underline{\underline{x' = \frac{4(1) - 0}{e^0 + 1} = 2}}$$

Karakter ønskes: