Aflevering 6 Matematik a

tqn889 - Carl Buan

October 2019

Opgave 2

$$f(x) = 4ln(x) + (x-1)^2 - 3$$

1)

$$\Rightarrow f'(x) = 4\frac{1}{x} + 2(x-1)^1 = \frac{4}{x} + 2x - 2$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{4}{x^2} + 2$$

$$\Rightarrow f(1) = 4ln(1) + (1-1)^2 - 3 = -3$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{4}{1} + 2 * 1 - 2 * 1 = 4$$

$$\Rightarrow f''(1) = -\frac{4}{1^2} + 2 = -2$$

$$\Rightarrow P_2(x) = -3 + 4(x-1) + \frac{-2}{2!}(x-1)^2 = -3 + 4x - 4 - x^2 - 1 + 2x$$

$$\underline{\underline{P_2(x) = -x^2 + 6x - 8}}$$

2)

$$\lim_{x\to 2} \frac{P_2(x)}{3x-6} \quad \lim_{x\to 3} \frac{P_2(x)}{3x-6}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-x^2 + 6x - 8}{3x - 6} \Rightarrow \frac{-2^2 + 6 * 2 - 8}{3 * 2 - 6} = \frac{-4 + 12 - 8}{6 - 6}$$

Tæller og nævner går begge mod nul når $x \to 2$, så derfor benytter vi L'Hopitals regel: Tæller og nævner differentieres hver for sig:

Så vi derefter kan indsætte 2 på x plads:

$$\lim_{x\to 2} \frac{-2x+6}{3} \Rightarrow \frac{-2*2+6}{3} = \frac{2}{3}$$

Og for $lim_{x\to 3}$:

Tælleren går her mod 1 og nævneren mod 3

$$\lim_{x\to 3} \frac{P_2(x)}{3x-6} \Rightarrow \frac{-3^2+6*3-8}{3*3-6} = \frac{1}{3}$$

Opgave 3

$$f(x) = xe^x$$

(a)

$$\Rightarrow f'(x) = e^x + xe^x$$

$$\Rightarrow f''(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$$

$$\Rightarrow f'''(x) = e^x + e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x$$

(b)

$$(0) = 0 * e^0 = 0$$

$$\Rightarrow f'(0) = e^0 + 0 * e^0 = 1$$

$$\Rightarrow f''(0) = 2e^0 + 0 * e^0 = 2$$

$$\Rightarrow f'''(0) = 3e^0 + 0 * e^0 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

$$\underline{\underline{P_3(x) = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3}}$$

(c)

Vores gæt for en formel for er:

$$f^{(n)}(x) = ne^x + xe^x$$

Vi Forsøger at lave et induktionsbevis:
For n = 1 kender vi svaret fra spørgsmål a

$$f'(x) = e^x + xe^x$$

For n+1

$$f^{n+1}(x) = (f^{(n)})'(x) = ne^x + e^x + xe^x = (n+1)e^x + xe^x$$

Altså er vores gæt blevet bevist