Mat, aflevering 8

ldg790 - Christian B. Gustafson

14/11-2019

Opgave fra en prøveeksamen fra 2016

Betragt følgende uendelige række (hvor x er et reelt tal):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{e^x}{1+e^x})^n$$

(a) Vis, at rækken er konvergent for alle $x \in R$.

For en uendelig geometrisk række, som skal være konvergent, gælder det at $|K| < 1$ for rækken $a + ak + ak^2 + ...$

Vi ved nu at

$$k = \frac{e^x}{1+e^x}$$

Vi ved også at da vores nævner vil blive større end 1 uanset x-værdi og e^x ikke kan blive negative, som indgår i både tæller og nævner, så vil $\frac{e^x}{1+e^x} < 1$ ligge inden for intervallet $-1 < k < 1$ for ethvert $x \in \mathbf{R}$

$$-1 < \frac{e^x}{1+e^x} < 1$$

Dvs. at $\underline{\underline{x \in (-\infty, \infty)}}$

b) Vis at

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{e^x}{1+e^x})^n = 1+e^x$$

Vi ved at;

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{e^x}{1+e^x})^n = \frac{a}{1+k} \rightarrow \frac{1}{1-(\frac{e^x}{1+e^x})}$$

$$\frac{1}{\frac{1+e^x}{1+e^x}-\frac{e^x}{1+e^x}} = \frac{1}{\frac{1}{1+e^x}}$$

$$\frac{1*(1+e^x)}{1} = 1+e^x$$

Dvs. at vi nu har bevist at

$$\underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{e^x}{1+e^x})^n = 1+e^x}}$$

c) Lad funktionen g(x) for alle $x \in \mathbf{R}$ være givet ved

$$g(x) = (1+e^x)^2$$

Bestem $g'(x)$

Jeg starter med;

$$g = u^2, u = (1+e^x)$$

$$\frac{d}{du}(u^2)\frac{d}{dx}(1+e^x) \rightarrow \frac{d}{du}(u^2) = 2u, \frac{d}{dx}(1+e^x) = e^x$$

$$2ue^x \rightarrow 2(1+e^x)e^x \tag{1}$$

Dvs. g'(x) er

$$\underline{\underline{g'(x) = 2(1+e^x)e^x}}$$

d) Bestem elasticiteten $El_x g(x)$.

For en differentiabel funktion som g med $g(x) \neq 0$ er elasticiteten mht. x defineret ved:

$$EL_x g(x) = \frac{x}{g(x)} g'(x)$$

Indsætter følgende tal for g(x) og g'(x):

$$EL_x g(x) = \frac{x}{(1+e^x)^2} 2(1+e^x)e^x = \frac{x(2(1+e^x)e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{2e^x x}{1+e^x}$$

Dvs.

$$\underline{\underline{EL_x g(x) = \frac{2e^x x}{1+e^x}}} \tag{2}$$

Den fundet elasticitet af g(x), giver os (approximativt) den procentvise ændring i funktionsværdien ved en ændring på 1 Pct. i x-værdien.

Elasticiteter fortæller os nemlig noget om de relative ændringer.

Opgave fra eksamen februar 2019

(a) Lad f(x) være en kontinuert funktion defineret på et interval I.
Gør rede for definitionen af det ubestemte integral

$$\int f(x)dx$$

Det ubestemte intergrale

$$\int f(x)dx$$

er mængden af alle stamfunktioner til f. Hvis F er en stamfunktion til f, kan vi altså skrive

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Hvor C kan være hvilket som helst konstant.

b) Lad f(x) være en kontinuert funktion defineret på **R** med stamfunktion F(x). Lad x_0 og y_0 være vilkårlige reelle tal.
Gør rede for, at der findes en stamfunktion G(x) til f(x), som opfylder betingelsen

$$G(x_0) = y_0$$

Stamfunktionen til f(x) er G(x) eftersom f(x) er en kontinuert funktion

$G_c(x) = G(x) + c$ vil være en stamfunktion til f, hvor c er en konstant Vi siger dermed at $c = y_0 - G(x_0)$

Dvs. $G(x) = G(x_0) + (y(0) - G(x_0) = G(x) = y_0$

c) Lad funktionen g(x) (for alle $x \in \mathbf{R}$) være defineret ved

$$g(x) = 2x(x^2+1)^3$$

Udregn det ubestemte intergrale

$$\int g(x)dx$$

Bestem den stamfunktion G(x) til g(x), der opfylder betingelsen $G(1) = 10$.
Vi starter med at udregne følgende intergrale:

$$\int 2x(x^2+1)^3 dx$$

$$u = x^2+1, du = 2x$$

$$\int u^3 du = \frac{1}{4}u^4$$

$$\underline{\underline{G(x) = \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + c}}$$

Nu vil vi bestemme stamfunktionen G(x) til g(x), der opfylder betingelsen $G(1) = 10$:

$$G(1) = \frac{1}{4}(1^2+1)^4 + c = 10$$

Jeg isolere C

$$G(1) = \frac{1}{4}(1^2+1)^4 + c = 10$$

$$c = 10 - \frac{1}{4}(1^2+1)^4$$

$$c = 10 - \frac{16}{4} = 6$$

Dvs. stamfunktionen der opfylder betingelsen G(1)=10 er:

$$\underline{\underline{G(1) = \frac{1}{4}(1^2+1)^4 + 6 = 10}}$$