MAT A, CHEAT SHEAT

Indhold

Der blev ikke fundet nogen elementer til indholdsfortegnelsen.

Induktionsbevis

EKS: $f^{(n)}(x) = ne^x + xe^x$, hvilket gælder for alle $n \in N$

Så sættes n=1: $f^{(\prime)}(x) = 1e^x + xe^x$. Hvilket er rigtigt.

Det skal altså også gælde for n+1

$f^{(n+1)}(x) = (f^n)'(x) = xe^x + ne^x + e^x = (n+1)e^x + xe^x$

Færdig!

Kæderegel

$(f(g(x))' = f'(g(x) * g'(x)$

Produktregel

$(f(x) * g(x))' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$

Kvotientregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{(g(x))^2}$$

Elasticitet

$$ELf(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}x$$

Implicit differentiation

Eks: $y^3 + 3x^2y = 13$

Find y' i punktet (2,1)

$$y' * 3y^2 + 6xy + 3x^2y' = 0$$

$$y'(3y^2 + 3x^2) + 6xy = 0$$

$$y' = -\frac{6xy}{3y^2 + 3x^2}$$

$$y'(2,1) - \frac{6(2)(1)}{3(1)^2 + 3(2)^2} = -\frac{12}{15}$$

L'Hoipitals regel

$$\lim_{n \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Hvis nævner eller tæller giver 0, så differentier både tæller og nævner indtil det ikke giver 0.

Eks. $\lim_{n \to 0} \frac{e^{x^2} - 2x - 1}{x} = \frac{2xe^{x^2} - 2}{1} = -\frac{2}{1} = -2$

Taylor - approksimation

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \ldots \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n 2$$

Eks. $f(x) = \ln(1+x)$
1) Find Taylor af grad 3 omkring punkt a=0

$$f(0) = \ln(1+0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \to f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \to f'' \quad (0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \to f'''(0) = 2$$

$$p3(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{-1}{2!}(x-0)^2 + \frac{2}{3!}(x-0)^3$$

$$= x - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3}x^2$$

Følger (difitinition)

Definition af hvornår en følge er konvergent:

En følge $s_n$er konvergent med grænseværdien, hvis følgen s_n nærmer sig vilkårligt tæt på s.

Det kan skrives: $\lim_{n \to \infty} s_n \to s$

Eks. $s_n = \frac{1}{n} \to \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.... Som vi kan ses jo større n bliver, jo tætter kommer vi på 0.

Dermed: $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \to 0$. Dermed er følgen konvergent.

En følge der ikke er konvergent er:$s_n(-1)^n \rightarrow -1+1-1+1$ .... Dvs. følgen springer fra -1 til 1 hele tiden, og når aldrig vilkårligt tæt på s. Dermed ikke konvergent.

Afsnitfølgen og konvergens (definition).

Hvis afsnitfølgen $s_n$er konvergent med $\lim_{n\to\infty} s_n \rightarrow s$, så siges den uendelige række at være konvergent med sum s: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \;\; (= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i)$

Eks. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ .... Vi lægger alle disse tal sammen, og vi vil derved til sidst opnå, eller komme vilkårligt tæt på 1. Dermed konvergent.

Eks. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1+1-1+1-1+1$ ... Det ses nemlig at den uendelige række springer fra 0 til 1 og når aldrig en sum. Dermed ikke konvergent.

Hvis den uendelige række $\sum_{i=}^{\infty} a_i$ er konvergent så gælder: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Bevis: $a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i = s_n - s_{n-1} = s - s = 0$

Geometriske rækker

Den geometriske række er konvergent når $|\mathrm{k}| < 1$ og så er summen: $\frac{1}{1-k}$

Definition af ubestemt integral

Hvis F er stamfunktion til f kan vi skrive: $\int f(x)dx = F(x) + c$, hvor c er en arbitrær konstant.

Eks. $\int (e^{3x} - 3x^2)dx = \frac{1}{3}e^{3x} - x^3 + c$

Eks. $\int \left((2t)^3 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt = 2\int t^3 = 2 * \frac{1}{4}t^4 + \int \frac{1}{\sqrt{t}} = 2t^4 + 2\sqrt{t} + c$

Definition af bestemt integral

Hvis: $\int_a^b f(x)dx = \{_a^b F(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Partiel integration

Lad f og g være differentiable funktioner: $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Dermed: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)$

Eks. $\int xe^{ax}dx = x\frac{1}{a}e^{ax} - \int \frac{1}{a}e^{ax} = x\frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}\int e^{ax} = x\frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a} * \frac{1}{a}e^{ax} + c$

Eks. $\int \ln(x)\, dx = \int \ln(x) * 1 = \ln(x) * x - \int \frac{1}{x} * x = \ln(x) * x - \int 1 = \ln(x) * x - x + c$
f(x)=ln(x)
g'(x)=1

Eks. $\int x^2 e^{-x}\, dx = x^2(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) = x^2(-e^{-x}) + 2\int x(e^{-x})$

$$\int x(e^{-x}) = x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) = x(-e^{-x}) - e^{-x} + c$$

$$\int x^2 e^{-x}\, dx = x^2(-e^{-x}) + 2(x(-e^{-x}) - e^{-x}) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$$

Partiel integration med bestemte integraler

Dvs. $\int_a^b f(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

Eks. $\int_0^1 (x+1)2^x\, dx = \left[(x+1)(\frac{1}{\ln(2)}2^x)\right]_0^1 - \int_0^1 1\left(\frac{1}{\ln(2)}2^x\right) = \left(\frac{2}{\ln(2)}2^1\right) - \frac{1}{\ln(2)}2^0 - (\frac{1}{\ln(2)^2}2^1 - \frac{1}{\ln(2)^2}2^0)$

Integration ved substitution

Betragt: $\int 3x^2(5+x^3)^7 dx$

Lad $g(x) = 5 + x^3$og $g'(x) = 3x^2$
Integralet kan skrives: $\int g'(x)(g(x))^7 = \int g'(x)F\big(g(x)\big)dx, hvor\ F(u) = u^7$

$$= f\big(g(x)\big) + c$$

$$= \frac{1}{8}(5 + x^3)^8 + c$$

$$\int G(x)dx \rightarrow u = g(x)\ \ og\ \ du = g'(x)dx \rightarrow \int f(u)du = F(u) + c = F\big(g(x)\big) + c$$

Eks. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{u} * \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\ln(u) = \frac{1}{2}\ln(5+x^2) + c$

Hvor: $u = 1 + x^2\ \ og\ du = 2xdx \rightarrow \frac{1}{2}du = xdx$

Eks. $\int \frac{e\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int e^u * 2du = 2e^u + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$

Hvor: $u = \sqrt{x}\ \ og\ \ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

Ugentlige integraler

Hvis grænseværdien eksisterer: $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$

Og hvis grænseværdien ikke eksistere så sige integralet at være divergent.

Vigtige eksempler:

$$f(x) = \frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^a} = \begin{cases} divergent \quad hvis \quad a \leq 1 \\ \dfrac{1}{a-1} \quad hvis\ a > 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{a-1}\ hvis\ a < 1 \\ divergent\ hvis\ a \geq 1 \end{cases}$$

Eks. $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\, dx = 2\int_0^b xe^{-x^2} = \int_0^b xe^{-u} \to u = x^2 \;\; og\ du = 2xdx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{b^2} e^{-u} = \frac{1}{2}[-e^{-u}]_0^{b^2} = \frac{1}{2}\left(-e^{-b^2} + e^0\right) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2} * 2 = 1\ når\ b \to\ \infty$$

Værdi og definitionsmængde