

Introduktion til Matematisk Finansiering 1

MatFin1, CBS, onsdag 7. september, 2022

rolf@math.ku.dk

Jeg er Rolf Poulsen

- rolf@math.ku.dk, rp.fi@cbs.dk
- SoMe: [LinkedIn](#), [Twitter](#) (mest mad og AGF)
- AcMe: [KU-MATH](#), [SSRN](#), [Wilmott](#)

Forelæsninger uge 36-43:

- Onsdage 9:50-11:30 i DH Ø1.41
- Torsdage 10:45-12:25 (lige kalenderuger; ulige ordenstalsuger), 10:45-13:20 (lige uger) i SPs07.

Eksamen: 9-13, onsdag 2. november

Pensum er [Lando & Poulsen \(2022\)](#) – *noterne*. De er gratis, og de er alle pengene værd. Röman er sekundær.

26. oktober 2021
Rolf Poulsen
rolf@math.ku.dk

Matematisk Finansiering 1, E21

Pensum

Fra [Lando & Poulsen \(2021\)](#), “Finance 1 and Beyond” (*noterne*):

- Afsnit 2.1 (særligt Example 1), 2.2-3, 2.6-7 (2.7.2 er ganske eksamensrelevant; 2.7.1 er ikke, 2.6 ej heller).
- Kapitel 4-6. Der kommer dog ikke spørgsmål om futureskontrakter (side 116-7), ligesom I heller ikke bliver stillet til regnskab for materialet fra “Optimal stopping theory” og fremad på side 127-8 – men amerikanske optioner kommer ofte ved eksamen.
- Kapitel 7, idet Black-Scholes-relaterede eksamensspørgsmål dog kun vil være konceptuelle, ikke regnetekniske.
- Kapitel 8, dog ikke 8.1.1 om kalibrering.

Der er været nogle smårettelser i løbet af kurset; vær sikker på at du har den seneste version af *noterne* – som fås via linket ovenfor.

Poulsen (2018), [“Cross-currency Betting Arbitrage”](#), en klumme i [Wilmott Magazine](#).

Fra Röman (2017) “Analytical Finance”, Palgrave/Macmillan:

Bind 1 Afsnit 2.1-6, Example 2.14, Example 2.16, Remark 2.17. Kapitel 3 til og med afsnit 3.3.6. Kapitel 8 (idet vi dog langt fra har talt om alle de simple strategier, *spreads*, der beskrives).

Bind 2 Kapitel 1-4, hvormed der reelt menes afsnittene 1.1.3, 2.1.9, 2.1.12, 2.1.18, 2.1.20, 2.1.20, 3.1.1 og 4.18. De dele af kapitel 15, der behandler diskrete (rente)modeller.

Der er ikke noget eksamensrelevant materiale fra Röman, der ikke er dækket af noter + klumme — men det gælder ikke den anden vej rundt.

Slides og gennemgåede opgaver er (som altid) pensum.

Rækkefølgen (ca.): (Dele af) 6.1-2, 2.2-3, 8.2, 4.1 og [“Cross-Currency Betting Arbitrage”](#), 4.2-3, 2.7.2, 5.1, 5.5, kap. 7, 5.2-4, mlg. dele af 6.1-2, 6.3-5, 8.1, 8.3.

Hvad gør vi i MatFin1?

Vi arbejder med fler-periode-modeller med usikkerhed for finansielle markeder.

Vi har særligt fokus på værdiansættelse af afledte aktiver i disse markeder (også kendt som strukturerede produkter, optioner, ...).

Vi bruger en ganske abstrakt/matematisk/teoretisk(/forsimplet) angrebsvinkel.

Kommer jeg til at kunne/skulle bruge det her til noget efter 2. november?

Kort svar: Ja

Længere svar:

- I et hvert kursus er der ting, som “man skal kunne til eksamen”, men ikke mange andre steder. *Dem der siger andet lyver.*
- Modellerne i dette kursus kan udvides (kontinuert tid er elegant; MatFin2) og bruges til mere avancerede produkter og problemstillinger.
- Vigtige overordnede principper: (a) man skal kunne regne på ting, (b) “there is no such thing as a free lunch”, (c) afledte produkter er overalt. Eksempler følger.

Ad (a): Overlader vi ting til jurister, så ...

Farvel 24syv!

Men det blev meget værre:

Jeg var sur i 2019:




Skam jer!




Per 1. januar 2017 har Radio- og tv-nævnet følgende medlemmer:

- Caroline Heide-Jørgensen, formand, professor, dr. jur.
- Anne Kristine Axelsson, næstformand, direktør, cand.jur.
- Kirsten Drotner, professor i medievidenskab
- Mark Lorenzen, professor i innovation og organisationsøkonomi
- Per Jauert, lektor i medievidenskab
- Merethe Eckhardt, udviklingsdirektør
- Peter C. Madsen, revisor (udpeget af Samarbejdsforum for Danske Lytter- og Seerorganisationer)

 **Rolf Poulsen**

A Tragedy of Errors: Tales of Innumeracy

This issue's column is quite *inside baseball*, or because of the distinct Danish angle *inside handball*. It contains several examples of innumeracy by people who should know better. That's just not cricket.



In the autumn of 2019, the Danish government solicited bids for a nationwide digital radio channel; the DAB offering for short. The winner of the offering would receive public funding of up to 280 million Danish kroner (DKK) (about 31-and-a-quarter million pounds as I write these lines) over 4 years. Applications would be assessed, and the winner chosen by the Radio & TV Board ("Board" in the following), an independent seven-person board under the Ministry of Culture. The Board members' backgrounds were in law or economics – none in publishing – and they had been appointed by the (previous) Minister for Culture. Applications were scored in three main categories with weighting and subcategories:

- Budget (= amount of DKK asked for in the application) with overall weight 25 percent and no subcategories.
- Operating plan (= admin stuff) with overall weight 35 percent and 3 subcategories
- Program plan (= creative side) with overall weight 40 percent and 11 subcategories.

By the deadline on September 22, 2019 there were three applicants: 24syv, LOUD, and DK4.¹ On October 22, the Board announced its decision in a report² whose main conclusion is shown in Table 1. LOUD scored 6.65, 24syv 5.10, and DK4 4.65, so LOUD was the winner – and seemingly a clear one at that. This came as a surprise to many: 24syv was generally regarded as the favorite, having run (very successfully in my view) a similar channel on FM radio for the previous 8 years. So, people³ (including myself) looked more closely at the numbers and calculations in the Board's report and problems started to emerge.

How not to round off and take averages: Table 2 takes a closer look at the Program plan category.

For each applicant, the points from the subcategories were added up, divided by the number of subcategories, rounded to the nearest integer, and multi-

Table 1: Summary of the results of the Radio & TV Board's assessment of the DAB-offering applications. The winner was LOUD

Applicant	Budget pts.	Operating pts.	Program pts.	Total score
24syv	0.25	2.45	2.40	5.10
LOUD	1.75	2.10	2.80	6.65
DK4	2	1.05	1.60	4.65

The winner is: **LOUD**

Ad (b), (c): Overlader vi ting til banker (og jurister) så ...

Swap-kontrakter:

- Landmænd: Valutarisiko
- Andelsforeninger: "Variabel til fast"-renteswaps. Hvordan kan det gå galt?
- Mindre (men mange) virksomheder: Justering for xVA; hvad er markedsværdi?

(Skriv speciale om xVA – ved Andreas fx -- og du har jobgaranti.)

8 BØRSEN. VIRKSOMHEDER MANDAG 22. JUNI 2020

Uklare aftaler har stor effekt for kunde og bank

Professor mener, det bør aftalens juridisk, hvad der er den rigtige metode til at opgøre den reelle markedsværdi af renteswaps



Andreas Winther Jensen mener, at bankerne bruger sig af de store danske banker, har uoverskuelige kontrakter og (Foto: Søren Andersen)

"Den er brandfarlig for bankerne, fordi de involverede beløb er kæmpestore"
Andreas Winther Jensen, Copenhagen University

kan mere autoritativt på, og som det bestemte er værd at få afklaret juridisk. Det centrale spørgsmål er jo, hvad det har været ment i kontraktens med begrebet "markedsværdi". For det er to oplysninger af betydning, der måder nok til hinanden.

hvor den begrebet "markedsværdi" skal forstås. Helt til mange virksomheder mener sig til de opgaver, de får fra banken. Men der har bankerne ikke modtaget et andet forslag, som de selv medtager, hvis de skal vurderes i forhold til bankens renteswaps. Det er et så stort et arbejde, at det er svært at gøre det selv. Derfor er kunder, banker og eksperter enige om, hvorvidt den ændring, bankerne opfører, kan kaldes en markedsværdi, så den nu ikke er udtryk for værdien af aftalen på markedet.

Markedsværdien er ikke kun vigtig, hvis kunden vil sælge sin aftale. Når værdien af aftalen er meget negativ for virksomhederne, så er det for eksempel direkte igennem i regnskabet hos Overgaard Genetics, fortæller direktøren Ole Overgaard.

"Vi vil nu, men i gæld på de fleste sager og dermed den store og således, at det er svært", siger Ole Overgaard fra Overgaard Genetics.

Revisorerne advarer. Andreas Winther Jensen, der har en titel i sin Brøns og Nordens Markeds, har for Børsen regnet på Overgaard Genetics og tre andre virksomheders swaps. Her har han lavet det første, som er nødvendigt, hvis man skal sætte sig selv i markedsværdi. Resultatet er, at markedsværdien er langt mindre negativ end bankens opgørelse.

Nogle andre bruger xVA, når man skal opgøre værdien af en swap. I Danmark er det regulat, men man er usikkert, at de skal benyttes over for kunderne.

FAKTA
Markedsværdi

- Markedsværdier den værdi, et aktiv vil sælge for på det aktuelle tidspunkt under normale omstændigheder.
- Markedsværdierne er ikke ensbetydende med, men afhænger af de enkelte aftales og betingelser.
- For finansiel aktør er det en værdi, der kan sælges for på det aktuelle tidspunkt under normale omstændigheder.

4

konkrete swaps har Copenhagen Universitys investitionsrådgiver på

som en renteswap, påpeger Andreas Winther Jensen. Nybrunt mener, at de kan give virksomhederne et bedre billede af markedsværdien, hvis de får adgang til at sælge dem for sig selv. Det ville i så fald også gøre det muligt for virksomhederne at sælge dem selv, hvis de bliver tvunget til at sælge dem. Det ville være en fordel for virksomhederne, siger Ole Overgaard fra Overgaard Genetics.

det, som man kan sælge betingelserne for. Når man opgør markedsværdien, bør man derfor tage hensyn til de forskellige funktioner, hvilket også er en vigtig del af metoden. Det er en vigtig del af metoden, der er markedsdata. Det er markedsdata, og derfor er det vigtigt at have adgang til den nødvendige data. Det er ikke nogen markedsværdi, som de har brug for, så det er en markedsværdi, som banken og en bank er en bank.

nd professional: When doing work in this area I find it important to have a sympathy for the fact that the legal system is in a rather sorry state, with both retail clients, banks, and the legal system display selective ignorance.

Resten af i dag: Forwardkontrakter og -priser

Følger dele af afsnit 6.1.

Definiton af forwardkontrakt (også kaldet terminskontrakt): Et implicit element omkring *forwardprisen*.

Vigtige værktøjer (*om det ord*) introduceres:

- Tegn en tidslinje!
- Notation og “lingo”

Resultater: Proposition 11-13

Prop. 11: Basisresultatet. $Fwd(t;T) = S(t)/P(t,T)$

Bevises med et simpelt portefølje- eller carry-argument, hvor i formuleringen “ellers er der arbitrage” dukker op. (Det er altid, hvad “så skal” betyder i MatFin1.)

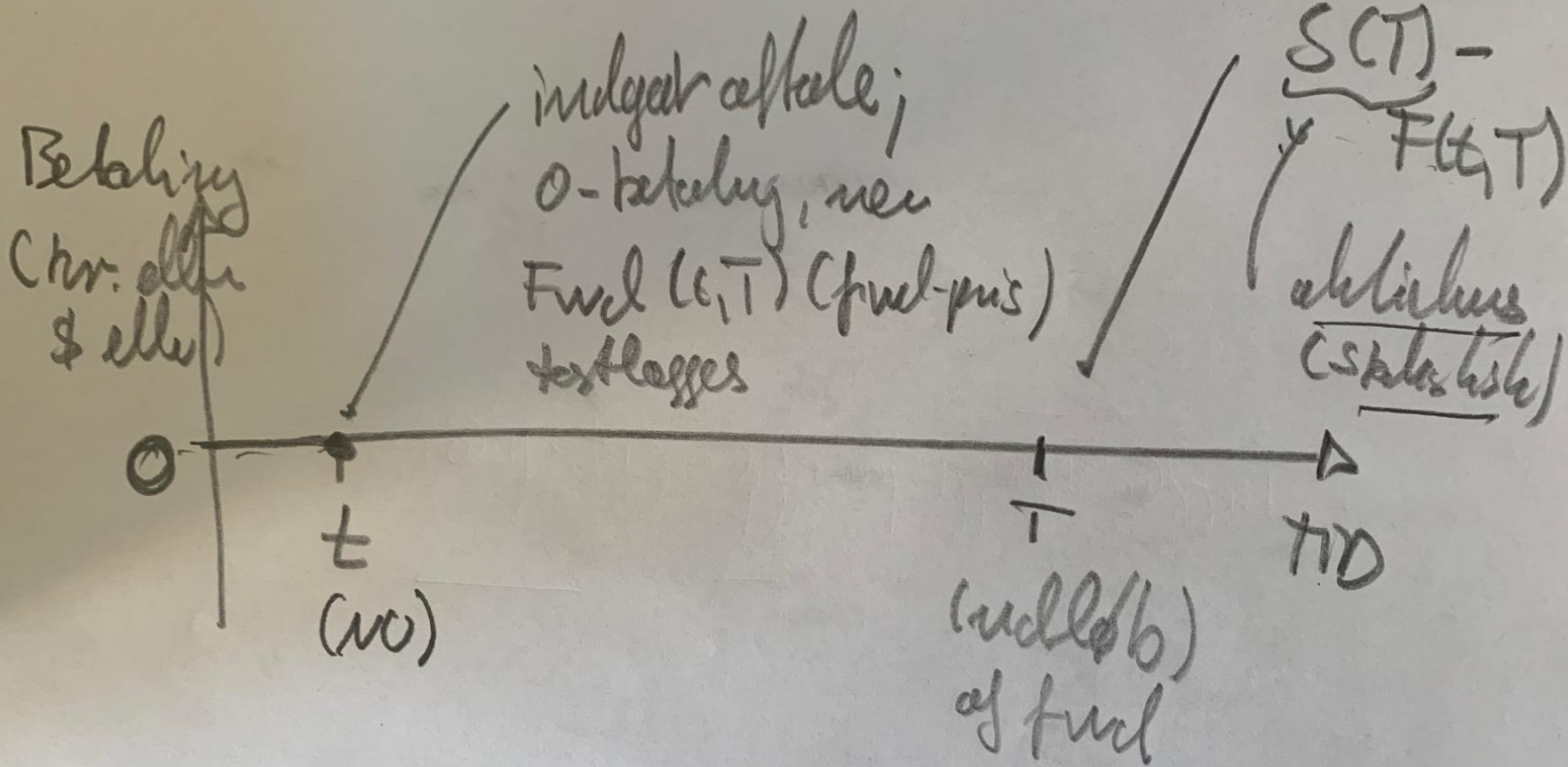
Prop. 12: Forwardpriser med determinitiske dividender.

Prop. 13: Forwardpriser med konstant dividenderate \sim valutaforwards.

Beviser: Variation af carry-argumentet. For Prop. 13 se opgave 3a i Finansiering 1-eksamen fra juni 2014. Bør nævnes: Lasse Heje Pedersen og medforfattere (2018): [“Carry”](#)

FERUVARIDHONTRANTIDSUNGE

Betaling / cost / fee



T-NHO: Betaler 1 mio til T, ikke andet.
PRIS på tid t: $P(t,T)$

Ord til ligninger

Optioner giver ejeren valgmuligheder; ”ret, men ikke pligt”. Det har værdi, vi vil bruge meget tid på at analysere hvor meget – kvantitativt; sætte et tal på.

Læg mærke til: I langt de fleste situationer, vi kommer til at betragte, vil der på tidspunktet, hvor valget skal træffes, oplagt kun være en fornuftig beslutning. (Ala: Indfri call, hvis kurs over strike, ellers ikke.)

Vi antager implicit, at ejeren ikke gør noget decideret dumt, når vi går fra ord til pay-off-ligning.

Et praktisk forhold som *fysisk levering* kan komplicere analysen (*war stories om* kaffe til Silkeborg, olie til Rotterdam og illikvide obligationsserier). Og det er så nok sidste gang, vi kommer ind på det.

Situationen kan også blive mere kompliceret af andre, mere teoretisk interessante, årsager:

- Amerikanske optioner (kommer vi til at se lidt på).
- Dynamisk optimalt porteføljevalg (kommer vi ikke ind på, med martingalmetoden ligger er vi forbløffende tæt på).
- Strategiske/spilteoretiske overvejelser (lang væk – men jeg sidder lige nu og regner på Meyer-strategier)

Konverterbare realkreditobligationer

Fra MatFin1-eksamen oktober 2017:

Opgave 3

Spg. 3a

Forklar hvorfor et konverterbart lån (fra låntagers synspunkt) kan ses som en kort position i en inkonverterbar obligation kombineret med en lang position i en amerikansk call-option.

-- --

Svaret sakset

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	3a										
2											
3	Så længe låntager ikke konverterer, så betaler han rente og afdrag som på et almindeligt lån,										
4	hvilket netop svarer til en kort position in en obligation; man har solgt obligationen mod at										
5	få nogle penge i hånden på tid 0.										
6	Når/hvis der konverteres, så betaler låntager den resterende hovedstol, men har så ikke										
7	nogen fremtidige forpligtelser. Det kan vi se som at man køber en inkonverterbar obligation										
8	for pris= den resterende hovedstol, altså at man indfrier en call-option med strike = resterende hovedstol,										
9	hvorefter betalingerne i fremtiden fra den lange og den korte position netter ud.										
10											

Tillægsspørgsmål:

- Hvorfor kan låntager overhovedet havde lyst til at betale sit lån tilbage før tid? Vil det ikke kun ske, hvis han vinder i lotto, mener at gæld er syndigt eller noget andet, vores modeller ikke tager højde for?
- Er det ikke bare godt for udlåner, hvis låntager betaler tilbage før, han skal?
- Låntager kan købe sin udstedte obligation tilbage på markedet til markedskurs (som teoretisk er ≤ 100). Dette kaldes often en *delivery option*. Hvorfor er dette egentlig ikke en option? (Men kan være værdifuld alligevel.)

Brexit, odds og tilstandspriser

Fra MatFin1, november 2016

Spg. 4b

Kort før EU-afstemningen 23/6 2016 gav (bookmaker-)markedet (decimal-)odds 5 på *Leave*, dvs. på at Storbritanien stemte for at forlade EU, altså Brexit.

- **Argumenter for at når rentediskontering ignoreres, så viser dette, at den risiko-neutrale sandsynlighed for *Leave* var $\frac{1}{5}$.**

6	4b								
7	Vædder man 0.2 på <i>Leave</i> får man 1 kr. igen i tilfælde af <i>Leave</i> , 0 ellers. Det er altså en digital optionspris.								
8	Og sådan en er pr. konstruktion (når vi glemmer rentediskontering) Q-sandsynligheden for udfaldet.								
9									

Binary Backwards

A Twitter exchange leads to a useful discussion on option modeling. So, social media isn't all bad...

Anybody who writes exams or performs job interviews knows the value of questions. If they are based on true stories or statements, even better. To my delight this showed up in my Twitter timeline (Figure 1).

(Let us assume @FMTrader1 describes an at-the-money down-binary (or digital) option with one week (five business days; 5/252 years) to expiry.)

Starter for ten, Q1: *What is the initial price of the digital option?*

The payoff is either 1 or 0, thus 1 is the only case with a positive rate of return, so the price, p , must solve $(1-p)/p = 0.7$, i.e., $p = 0.588$.

Going into modeling, Q2: *Is that price consistent with the Black-Scholes model?* In the Black-Scholes model, the price of this at-the-money down-binary option is

$$1 - \Phi\left(\frac{\tau(r-d-\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right),$$

which goes rapidly to $\frac{1}{2}$ for $\tau \rightarrow 0$, meaning that with one week to expiry we'd need extreme parameter assumptions to generate a price of 0.588. So, in a word: No. (The question can also be phrased such that it works for students who've only heard of the standard binomial model, but either the question or the answer becomes much less elegant.)

Feeling smug, I sent out the questions to people in the quantitative finance community.

One of the recipients, let's call him KwantDaddy, chipped in with Q3 (at 10:39): *Is it consistent with a jump diffusion model (à la the Merton model)? If*



Swaptioner

Fra MatFin1, november 2018.

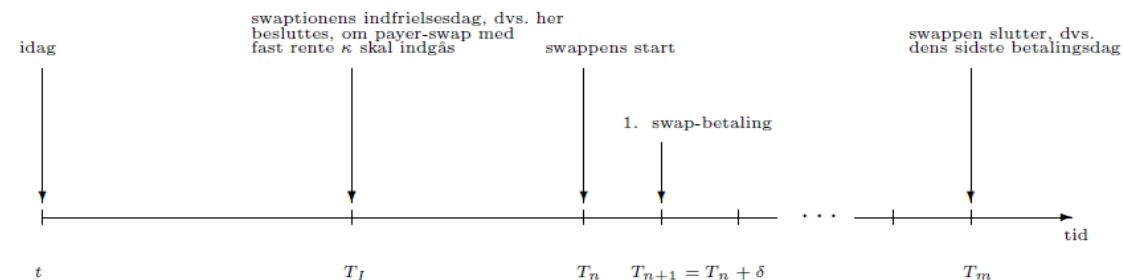
Svaret kan læses i den vejledende besvarelse – det er ikke super vigtigt lige her.

Et vink synes jeg næsten giver svaret; det viste sig ikke at være tilfældet.

Spg. 2b

Beregn tid 0-swap-renter.

Nu betragtes en såkaldt swaption, der – som ordet antyder – er en option på en swap-rente. Helt præcist er det en kontrakt, der på et indfrielsestidspunkt giver ret, men ikke pligt, til at indgå en payer-swap (dvs. man betaler fast rente) med fast rente κ , kaldet swaptionens strike-rente. Tidslinjen for betalinger (samt definition af notation) fremgår af figuren nedenfor:



Spg. 2c

Argumenter for at swaptionens værdi på indfrielsestidspunktet T_I (=dens *pay-off*) er

$$\delta(\omega(T_I; T_n, T_m, \delta) - \kappa)^+ \sum_{j=n+1}^m P(T_I, T_j),$$

hvor $\omega(T_I; T_n, T_m, \delta)$ er tid T_I -swaprenten for den underliggende swap, dvs.

$$\omega(T_I; T_n, T_m, \delta) = \frac{P(T_I, T_n) - P(T_I, T_m)}{\delta \sum_{j=n+1}^m P(T_I, T_j)}.$$

Put-call-pariteten set anderledes

Fra MatFin1-eksamen januar 2018

Spg. 3b

Forklar følgende udsagn (fra ~~2018-2019~~).

Put-call pariteten viser, at en call-option svarer til en gearet position i det underliggende aktiv suppleret med en tabsforsikring.

5	
7	3b
3	(Lad os antage rente og dividende er 0.)
9	Put-call-pariteten siger at $call(t) = put(t) + S(t) - K$
0	Call-optionen kan altså ses som en lang positionen i aktien (+S) og i put'en (+put),
1	samt en kort position i bankbogen. Man har altså købt sine aktiver for (delvist)
2	lånte penge; dette er netop en gearet position. Put-optionen har positivt pay-off
3	netop når aktiens kurs falder (til under striken) og kan derfor ses som en tabsforsikring.
4	
-	

Et struktureret produkt

Fra Fin1-eksamen, juni 2011.
(Findes også som en MatFin1-
opgave.)

Based on a true story.

Betragt et finansielt aktiv, en såkaldt IFN-kontrakt, der på tid $T = 3$ har denne "pay-off"-struktur:

- Hvis $S(T) \leq 100$, så modtager investor (eller: ejeren) 100.
- Hvis $100 < S(T) \leq 125$, så modtager investor $0.8 \times S(T) + 20$.

1

-
- Hvis $S(T) > 125$, så modtager investor 120.

Spg. 1b

Vis at IFN-kontrakten kan skrives som en portefølje af nul kuponobligationer og call-optioner. Beregn den arbitrage-fri tid-0-pris på IFN-kontrakten.

Svar med en tegning:

