# Mere grundlæggende optionsteori

MatFin1, onsdag 14/9 2022

rolf@math.ku.dk

# Dagens plan

Grundlæggende optionsteori fra afsnit 6.2. Fokus på modeluafhængige resultater. Eller: Evigtgyldige – men ikke nødvendigvis indlysende – sandheder

Rundt og rundt om put/call-pariteten (“base case” i Proposition 16)

Payoffdiagrammer

Call-priser er konvekse i strike og (positiv rente, 0 dividende) voksende i løbetid

# Put/call-pariteten

**Proposition 16.** *(Base-case put-call parity) Let $call_t$ and $put_t$ denote prices of (European) expiry-$T$, strike-$K$ calls and the prices on a certain stock. If the stock does not pay dividends during the life of the options, then we have*

$$call_t - put_t = S_t - KP(t,T).$$

Vi beviser det med et simpelt portefølje/replikationsargument (+ “ikke arbitrage”). I noterne er der også et abstrakt bevis. Det vender vi tilbage til senere.

Corollary 3 giver en general put/call-paritet (dvs. den gælder også med dividender) udtrykt via forwardpriser:

**Corollary 3.** *(General put-call parity.) Expiry-$T$, strike-$K$ put and call prices must satisfy*

$$call_t - put_t = P(t,T)(\mathrm{Fwd}(t,T) - K).$$

Noterne omtaler kort et abstrakt bevis. Lad os prøve at gøre det med et elementært portefølje- (og ikke-arbitrage-) argument. (Tavle – næste slides er *notes to self*)

LANG Call, KORT Put } TID t
KORT FWD, LANG K NKO }

PAYOFF TID T $\quad (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ \Big\} \; S_T - K$

$$\underbrace{+\,\mathrm{Fwd}(t,T) - S_T + K}_{\mathrm{Fwd}(t,T)} \Big\} \text{ KENDT TID } t$$

tid-t værdi af PAYOFF = $\mathrm{Fwd}(t,T)\,P(t,T)$

PÅ DEN ANDEN SIDE

PRIS PÅ TID t = Call − Put − 0 + $P(t,T)\,K$

VI MÅ HA $\mathrm{Fwd}(t,T)\,P(t,T) = \mathrm{Call}_t - \mathrm{Put}_t + P(t,T)\,K$

Konkret: Hvis der er dividender, bli'r S-leddet på højresiden på en eller anden måde anderledes:

- 2b fra Fin1-eksamen juni 2012, put/call-paritet med en slags dividende.
- 3c fra Fin1-eksamen juni 2013, put/call-paritet med en anden slags dividende.

Noterne i vanlig kompakt form: *Propositions 12-13 can then be used to treat special dividend structures.*

# Put/call-pariteten er nyttig fordi ...

- Den kan fange fejlagtig intuition (fx ”hvis den forventede værdi at S(T) stiger, så stiger call-prisen"; pr. samme argument sku' put-prisen falde, men det er i modstrid m/ fast højreside i put-call-pariteten).

- Den fortæller, at hvis vi kan prisfaststte call-optioner, så kan vi lynhurtigt prisfastsætte put-optioner. (Men det kan vi ikke endnu!)

- Yndlingsaversion: ”Implicit volatilitet for put-optioner”

- Den er ofte ”fødselshjælper” beviser/udregninger/vurderinger/opgaver.

- For rigtige data kan bruge den til at estimere rente og dividender – og til at finde fejl i data

- Det kan teoretisk/teknisk set være behageligt at arbejde

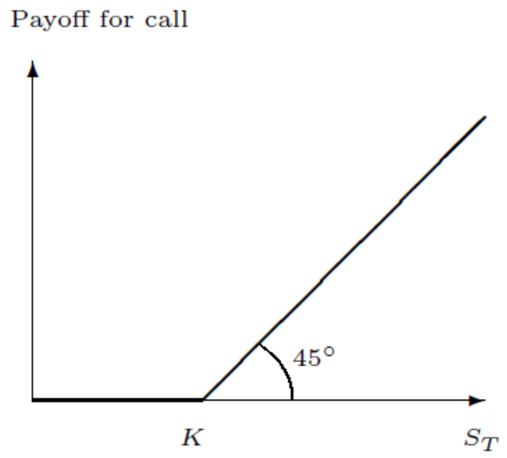
med put-optionen, der har en begrænset (og kontinuert)

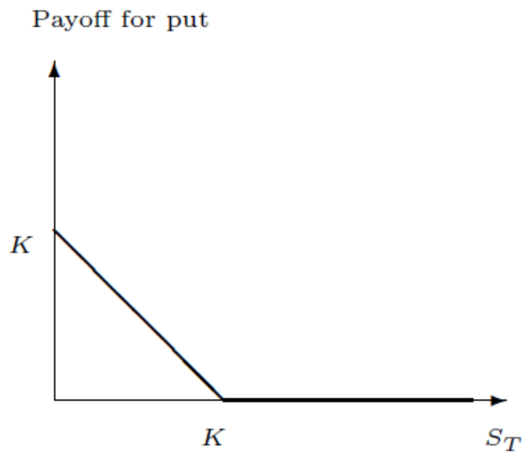
payoff-funktion (max(K-x,0)).

# Payoffdiagrammer

En options udbetaling til sidst (tid T; dens payoff) som funktion af det underliggende aktivs tid T-værdi.

For call- og put-optioner er det "hockeysticks":



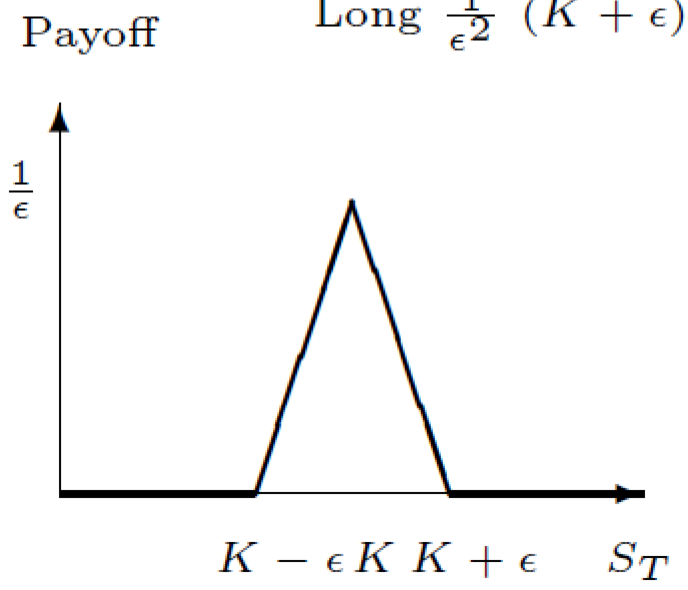
Uhyre nyttige at arbejde med.

Eksempel: Butterfly spread

Butterfly spread: Long $\frac{1}{\epsilon^2}$ $(K-\epsilon)$-call

Short $\frac{2}{\epsilon^2}$ $K$-call

Long $\frac{1}{\epsilon^2}$ $(K+\epsilon)$-call



# Binary Backwards

**A Twitter exchange leads to a useful discussion on option modeling. So, social media isn't all bad…**

Anybody who writes exams or performs job interviews knows the value of questions. If they are based on true stories or statements, even better. To my delight this showed up in my Twitter timeline (Figure 1).

(Let us assume @FMTrader1 describes an at-the-money down-binary (or digital) option with one week (five business days; 5/252 years) to expiry.)

Starter for ten, Q1: *What is the initial price of the digital option?*

The payoff is either 1 or 0, thus 1 is the only case with a positive rate of return, so the price, $p$, must solve $(1-p)/p = 0.7$, i.e., $p = 0.588$.

Going into modeling, Q2: *Is that price consistent with the Black–Scholes model?* In the Black–Scholes model, the price of this at-the-money down-binary option is

$$1 - \Phi\left(\frac{\tau\left(r - d - \sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right),$$

which goes rapidly to ½ for $\tau \to 0$, meaning that with one week to expiry we'd need extreme parameter assumptions to generate a price of 0.588. So, in a word: No. (The question can also be phrased such that it works for students who've only heard of the standard binomial model, but either the question or the answer becomes much less elegant.)

Feeling smug, I sent out the questions to people in the quantitative financ community.

One of the recipients, let's call him KwantDaddy, chipped in with Q3 (at 10:39): *Is it consistent with a jump diffusion model (à la the Merton model)? If*

FMTrader
@FMTrader1
Binary Options:
You: Oil prices will go down.
*After a week - prices go down*
You: Yay 70% profit!
Trading app - 18+

# Swaptioner

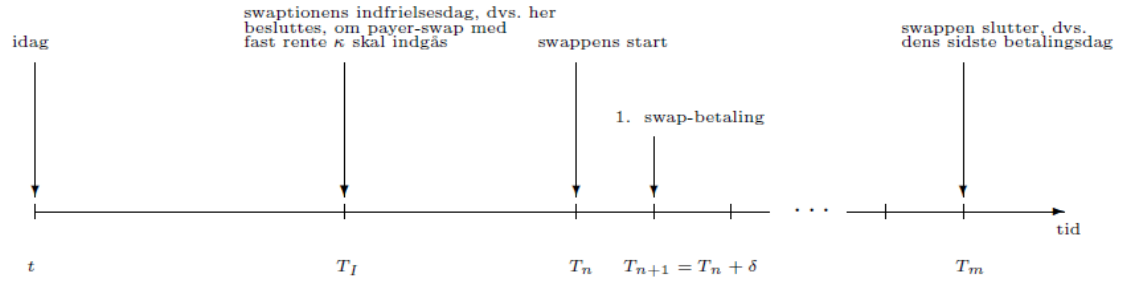
Fra MatFin1, november 2018.

Svaret kan læses i den vejledende besvarelse – det er ikke super vigtigt lige her.

Et vink synes jeg næsten giver svaret; det viste sig ikke at være tilfældet.

Spg. 2b
**Beregn** tid 0-swap-renter.

Nu betragtes en såkaldt swaption, der – som ordet antyder – er en option på en swap-rente. Helt præcist er det en kontrakt, der på et indfrielsestidspunkt giver ret, men ikke pligt, til at indgå en payer-swap (dvs. man betaler fast rente) med fast rente $\kappa$, kaldet swaptionens strike-rente. Tidslinjen for betalinger (samt definition af notation) fremgår af figuren nedenfor:




Spg. 2c
**Argumenter for** at swaptionens værdi på indfrielsestidspunktet $T_I$ (=dens *pay-off*) er

$$\delta(\omega(T_I; T_n, T_m, \delta) - \kappa)^+ \sum_{j=n+1}^{m} P(T_I, T_j),$$

hvor $\omega(T_I; T_n, T_m, \delta)$ er tid $T_I$-swaprenten for den underliggende swap, dvs.

$$\omega(T_I; T_n, T_m, \delta) = \frac{P(T_I, T_n) - P(T_I, T_m)}{\delta \sum_{j=n+1}^{m} P(T_I, T_j)}.$$

# Et struktureret produkt

Fra Fin1-eksamen, juni 2011. (Findes også som en MatFin1-opgave.)

*Based on a true story.*

Betragt et finansielt aktiv, en såkaldt IFN-kontrakt, der på tid $T = 3$ har denne "pay-off"-struktur:

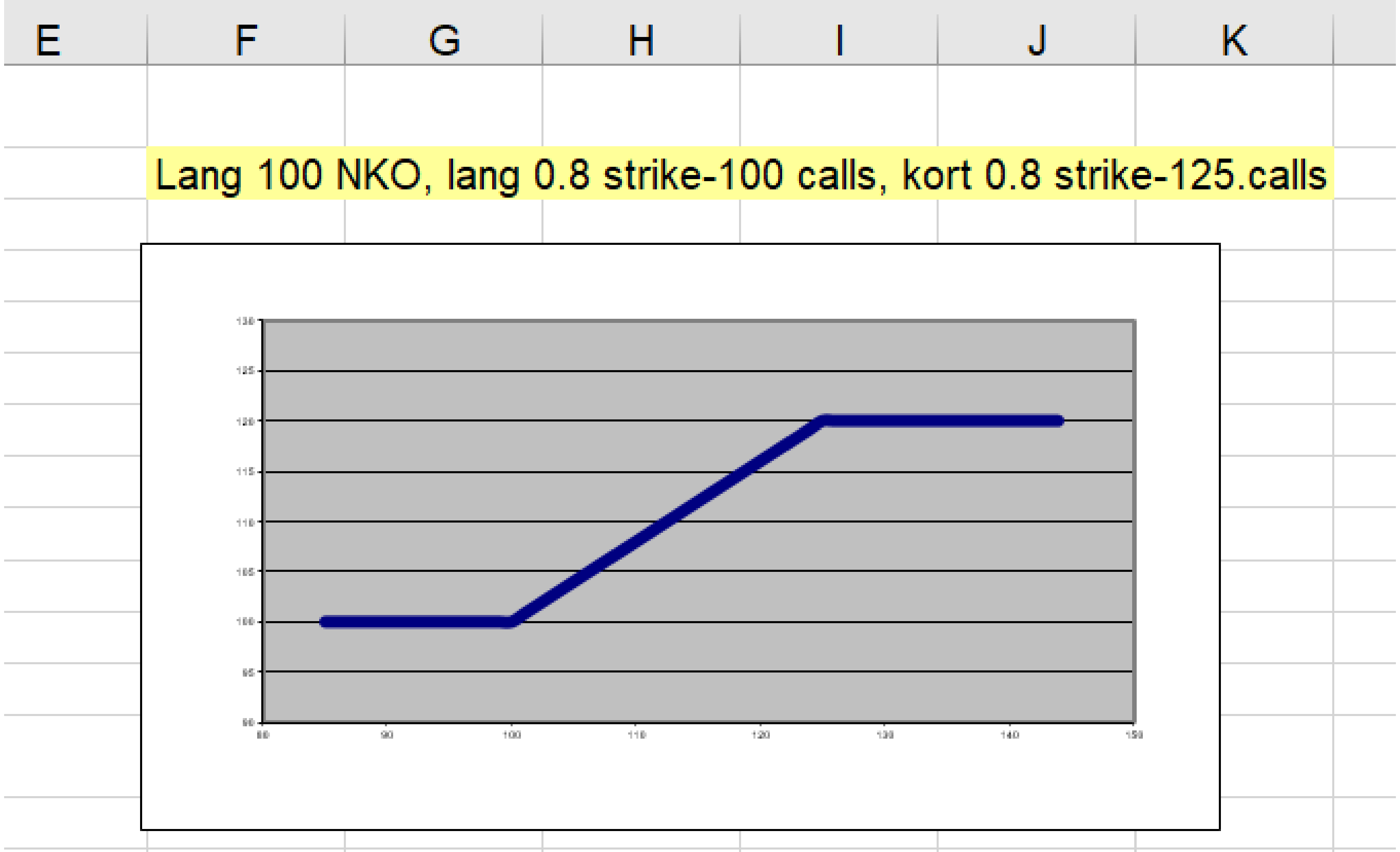
- Hvis $S(T) \leq 100$, så modtager investor (eller: ejeren) 100.
- Hvis $100 < S(T) \leq 125$, så modtager investor $0.8 \times S(T) + 20$.

1

- Hvis $S(T) > 125$, så modtager investor 120.

<u>Spg. 1b</u>
**Vis at** IFN-kontrakten kan skrives som en portefølje af nulkuponobligationer og call-optioner. **Beregn** den arbitrage-fri tid-0-pris på IFN-kontrakten.

# Svar med en tegning:



# Proposition 17

1. *For a fixed strike $K$, call prices are increasing with time to expiry, $T$ provided interest rates are positive and the stock does not pay dividends during the life of the options.*

2. *The price of European call is a convex function the strike, $K$. The function is also positive and decreasing.*

Bevis: (2) Butterflyspreads has positive priser, (1) Mertons tunnel

Bemærkning: Betingelserne er ikke kun nøvendige for fravær af arbitrage, de er faktisk (op til teknisk fnidder) tilstrækkelige. (Så det er så langt, vi kan komme med modeluafhængige resultater.)