# Replikation og *Greeks*
# Forwards og futures
# Amerikanske optioner

Matematisk Finansiering 1
Efterår 2022

26. oktober

# Hovedresultater

Vi har vist de to hoved/fundamentalsætninger:

1. Modellen $(S, \delta, \rho)$ er arbitragefri hvis og kun hvis den har et martingalmål, $Q$.
2. En arbitragefri model er komplet ($\sim$ alt kan replikeres) hvis og kun hvis $Q$ er entydig.

Korollarene, vi bruger hele tiden:

- Alt kan tjekkes lokalt via

$$S^i(t) = \frac{1}{1+\rho(t)} \mathrm{E}_t^Q \left( S^i(t+1) + \delta^i(t+1) \right) \quad \forall\, i, t, \omega.$$

- 1-periode-delmodellerne ser ud som $\pi \sim S(t)$, $D \sim S(t+1) + \delta(t+1)$, hvor vi skal huske at tage det riskikofrie aktiv med – hvis det findes.
- I en komplet model har et nyt aktiv med tid $T$-payoff den entydige arbitragefrie prisproces

$$\pi(t) = \frac{1}{1+\rho(t)} \mathrm{E}_t^Q (\pi(t+1)) = \mathrm{E}_t^Q \left( \frac{\text{Pay-off}(T)}{R_{t,T}} \right).$$

- Ethvert nyt aktiv, der kan replikeres, har en entydig arbitragefri pris = prisen på en replikerende portefølje.

Det er en generel modelramme (omend med diskret tid og endeligt tilstandsrum):

- Konceptuelt klar separation imellem priser og dividender.
- Fuld stiafhængighed hos afledte aktiver kan håndteres. Typisk opgave. (Beregningsmæssig effektivitet er et andet spørgsmål; knyttet til Markov-egenskaben, som der står lidt om i afsnit 6.4 i noterne.)
- Modellerne er født med stokastisk rente. (Antagelsen om $\exists$ lokalt risikofrit aktiv er ingen reel restriktion, se opgave 1, Fin1, juni 2017.) Ligesom vi kan skifte tidspunkter fra $0, 1, 2, \ldots, T$ til $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_T$, se opgave 1 MatFin1, oktober 2019.

Og vores beviser er vandtætte (og nærmer sig det elegante).

CBS

## $\frac{1}{2}$-abstrakte anvendelser ...

... og "general to specific":

- Formen af replikerende porteføljer, $\Delta$-hedging og *Greeks*. (Noterne 6.3.)
- Forwards (eller forward-kontrakter) i nyt lys; Proposition 14 i noternes afsnit 6.1.
- Futures (eller futures-kontrakter); side 116-7 i noternes afsnit 6.1.
- Praktisk og filosofisk om forwards og futures; side 117 i noterne.
- Amerikanske optioner, afsnit 6.5. (Læs selv afsnit 6.4.)

Dukker tit op i diverse former i *standardopgaven* eller *rentestandardopgaven* (som kommer om lidt).

CBS

# $\Delta$-hedging og *Greeks*

I basis-tilfældet (dvs. ingen dividender, binomialmodel) skal vi for at replikere et afledet aktiv med pris $\pi$ holde

$$\Delta(t) = \frac{\pi^u(t+1) - \pi^d(t+1)}{S^u(t+1) - S^d(t+1)}$$

enheder af det underliggende aktiv.

Bemærk ligheden til partiel afledet. (I kontinuert tid er det eksakt rigtigt.)

Ved "julelege"/ugler i mosen: Skriv replikationsligningerne op.

Sådanne følsomheder (patielle afledede) betegnes med (noget der lyder som) græske bogstaver og kaldes *Greeks*; $\Gamma$ (Gamma, $\partial^2_{S^2}$), $\theta$ (theta, $\partial_t$), $\mathcal{V}$ (Vega, $\partial_\sigma$), ...

Resultat: Hvis en options payoff-funktion er konveks, så er dens $\Gamma > 0$ og dens $\mathcal{V} > 0$. (Gives lettest præcis mening i Black-Scholes-modellen.)

Markedsdeltagere vil ofte lave porteføljer, der er forsøgt immuniseret overfor allehånde effekter ved at "matche Greeks". Også selvom det ikke giver modelmæssig mening.

# Et abstrakt kig på forward-kontrakter

De mest generelle udtryk (vilkårlige dividender, stokastisk rente) for forward-priser er givet i Proposition 14, afsnit 6.1 i noterne:

$$\mathrm{Fwd}(t,T) = \mathrm{E}_t^Q\left(\frac{S(T)}{R_{t,T}}\right)/P(t,T).$$

Bevis: Tavle.

I simple tilfælde (konstant rente, ingen eller håndterbar dividende) genetablerer det vores formler fra uge 1.

Lidt om opgave 1, Fin1, juni 2018 — dog nok ikke inklusive *det hemmelige ark* i svar-filen.

## Futures-kontrakter

Side 116-7 i noterne.

Tænk på det som en forward-kontrakt, hvor gevinster/tab afregnes løbende (så pris $\equiv 0$) gennem justeringer i aftalekursen, kaldet futuresprisen og (her) skrevet $\mathrm{Fut}_t$.

På (hvert) tidspunkt $t$ betaler futures-kontrakten $\mathrm{Fut}_t - \mathrm{Fut}_{t-1}$; Fut er en således kumulativ dividendeproces.

Hvis man syn's, det er lidt bagvendt, underligt, bider sig selv i halen, ..., så er jeg ikke ganske uenig. (Men beskrivelsen er værre andre steder.)

Baglæns induktion (tavle) giver (stokastisk rente eller ej, dividender eller ej) at

$$\mathrm{Fut}_t = \mathrm{E}_t^Q(S_T).$$

Hvis renten er deterministisk (og generelt med 1 periode til udløb; $t = T - 1$) så er

$$\mathrm{Fut}_t = \mathrm{Fwd}(t, T).$$

Men derfor er forwards og futures stadig forskellige kontrakter; de har forskellige betalinger.

# Futures ∼ forwards med løbende afregning

Lad os for simpelheds skyld antage renter og dividender er 0, og at vi indgår en $T$-forward på tid $t$. Dens forwardpris (husk stadig: det er faktisk en aftalekurs) er $S(t)$.

På tid $t+1$ er værdien af vores forward ikke 0, men

$$\mathrm{Fwd}(t+1,T) - \mathrm{Fwd}(t,T) = S(t+1) - S(t).$$

Hvorfor? Tag en kort position/sælg en forward. (Og husk at renten er 0.)

Så for netop dette beløb er vi villige til at afstå/likvidere forwarden. Og det er jo præcis betalingen, vi modtager, på en futures (husk at her $S = \mathrm{Fut}$).

## Praktisk/filosofisk om forwards og futures

I valutasammenhæng har vi set det nyttige i forward-kontrakter. Man kan også nemt forstille sig det nyttige i futureskontakter på boligprisindeks. Eller forwards/futures på dividender (*Shiller contracts*).

Kun futures (ikke forwards) handles på børser; hvorfor?

- Nemmere bogholderi. Man skal kun holde styr på udløbsdatoen, ikke indgåelsestidspunktet.
- Nemmere overvågning mht. fallit/kreditrisiko. I praksis skal man stille noget som sikkerhed; kaldes at stille margin ("post margin"; hvis der på et tidspunkt skal stilles yderligere sikkerhed kaldes det et "margin call").

# Hvornår er futures/forward-prisning ikke-triviel?

Obligationsfutures. Men forskellen futures-forward er som regel lille. (Man kan skrive op hva' fortegnet er afh. af fortegnet på korrelationen mellem underliggende og rente, men det kan man aldrig huske alligevel!)

Dividender. Eller for obligationer: kuponbetalinger. Man skal være forsigtig på samme måde, som når man laver put/call-paritet m/ dividende. *Carry*-artiklen omtalt i 1. uge.

Hvis man ikke kan købe det underliggende aktiv for lånte penge og holde/opbevare det indtil udløb; det være sig af (i) praktiske eller (ii) teoretiske årsager. Ex: (i) el, råvarer, (ii) temperatur, renter, dividender, volatilitet.

# Amerikanske optioner

Optioner med mulighed for førtidig indfrielse. Afsnit 6.5 i noterne, afsnit 2.7.14 i Röman, I – og ofte i opgaver.

Kaldes af historiske årsager *amerikanske*; det ku' ligeså godt ha' været *orange* eller *varmforzinkede*. (Eller ihvertfald næsten ligeså godt; se side nederst side 4 her.)

Optioner med kun et, fast indfrielsestidpunkt kaldes europæiske.

Prisfastsættelse: I hver knude: Tjek om optionen er mere værd *død* end *i live*. Hvis ja, så indfri og byt ud

Eller som formel/ligning:

$$\pi_g^{AMR}(t) = \max\left\{ g(S(t)), \frac{1}{1+\rho_t} \mathrm{E}_t^Q(\pi_g^{AMR}(t+1)) \right\}, \qquad (*)$$

hvor $g$ betegner payoff-funktionen (fx $g(x) = (K - x)^+$ for en put-option) og $\pi_g^{AMR}(T) = g(S(T))$.

Ligning (*) kan ses som et specialtilfælde af dynamisk programmering eller et eksempel på Bellmans optimalitetsprincip.

Ideen dukker op mange andre steder – fx hvis man vil vide, hvornår man skal *pull the goalie*.

Det er nemmere gjort end sagt – idet det dog er vigtigt, at man gør *præcis*, hvad formel (*) siger.

Regneeksempler: MatFin1, januar 2018, spg. 1d; *Example 27* i noterne.

| | | | |
|---|---|---|---|
| AMR put | K | 100 | 1d |
| | | | |
| | | 0 | |
| | 0 | 0 | |
| 8,252427 | 20 | 40 | rød~indfri |

Clipboard | Font | Alignment | Numbe

SUM `=MAX(($I$3*D15+(1-$I$3)*D16)/(1+$I$2),H10)`

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Stock price lattice | | | | | | | | |
| 2 | | | | 172.8 | | | | R | 0.05 |
| 3 | | | 144 | 129.6 | | | | q | 0.5 |
| 4 | | 120 | 108 | 97.2 | | | Put | Expriy | 3 |
| 5 | 100 | 81 | 72.9 | 65.61 | | | | Strike | 100 |
| 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | European put | | | | | Intrinsic value | | | |
| 9 | | | | 0.000 | | | | | 0 |
| 10 | | | 0.000 | 0.000 | | | | 0 | 0 |
| 11 | | 0.635 | 1.333 | 2.800 | | | 0 | 0 | 2.8 |
| 12 | 4.620 | 9.068 | 17.710 | 34.390 | | 0 | 19 | 27.1 | 34.39 |
| 13 | | | | | | | | | |
| 14 | Amrerican put | | | | | Exercise strategy | | | |
| 15 | | | | 0.000 | | | | | HOLD |
| 16 | | | `=MAX(($I$` | 0.000 | | | | HOLD | HOLD |
| 17 | | 0.635 | 1.333 | 2.800 | | | HOLD | HOLD | EX |
| 18 | 9.350 | 19.000 | 27.100 | 34.390 | | HOLD | EX | EX | EX |
| 19 | | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | |

Vigtigt specialtilfælde: Hvis renten er positiv bør amerikanske call-optioner på aktiver uden dividende aldrig indfris førtidigt. Bevis: Mertons tunnel-agtigt – idet man dog potentielt skal være forsigtig for at få skarpe uligheder.

Alle tre antagelser (call, $r > 0$ og $\delta = 0$) er vigtige; som gamle eksamensopgaver viser:

- For put-optioner kan førtidig indfrielse være optimalt selv for $r > 0$ & $\delta = 0$.
- $r = 0$ & $\delta > 0 \Rightarrow \text{Put}^{EU} = \text{Put}^{AMR}$
- $r < 0$ & $\delta = 0 \rightsquigarrow \text{Call}^{AMR} > \text{Call}^{EU}$
- Korollar: Put-call-pariteten holder ikke for amerikanske optioner.