1. Forelæsning

Forward kontrakt: en aftale på tidspunkt t om at købe et fremtidig aktiv på tid T til prisen FWD(t,T) forwardpris som er kendt på tid t.

Underliggende aktiv har markedspris: $S(u)t \leq u \leq T$. Ingen dividende/udbytte betalinger i perioden, (t,T).

Vi kan låne penge, specielt er nulkupon obligation (T-NKO: betales 1 på tid T. Pris på tid t P(t,T). u≤T.

Eksempel: I tid t køber vi en aktie som er vore forward kontrakt. Vi indgår i en kort position i en forward kontrakt. Det koster S(t) at købe en aktie. Negativt fortegn betyder penge op af lommen. Vi sælger NKO til $S(t)/P(t,T)$.

$-S(t) + S(t)/P(t,T) * P(t,T) + 0(FWDkontrakten) = 0$

tid T: Luk position til markedsprisen S(T). Jeg har solgt obligation (lånt penge som betales tilbage: $S(T) + S(T)/P(t,T) * 1$(1 penge skal betales tilbage for hver kontrakt)$+FWD(t,T) * S(T) = FWD(t,T) - S(t)/P(t,T) = 0$. Dette skal være lig 0, ellers er der en arbitrage mulighed.

$FWD(t,T) * S(T)$: Payoff fra kort position.

$FWD(t,T) = S(t)/P(t,T)$: Denne er kendt på tidspunkt t

2. Forelæsning

Portefølje med dividente betalinger:

Aktie: $+1$

T-NKO: $-\frac{S(t)}{P(t,T)} + \frac{P(t,t_J)\delta(t_J)}{P(t;T)}$

$P(t,t_J)\delta(t_J)$: er så mange penge jeg har fået i hånden som jeg bruger il at købe NKO.

T-FWD: -1

$t_J - NKO$: $-\delta(t_J)$. Et aktiv jeg har solgt. Netttobetalingen er ikke længere 0.

Netot betlaingen på tidspunkt T: $S(T) - \frac{S(t)}{P(t,T)} + \sum_J \frac{P(t,t_J)\delta(t_J)}{P(t;T)} - S(T) + FWD(t;T) = 0$: Dette må være lig 0 ellers arbitrage. Dette omskrives til prop 12:

$$FWD(t,T) = \frac{S(T) - \sum_J P(t,t_J)\delta(t_J)}{P(t;T)}$$

$S(T)$: SPot prisen. Prisen i dag på det underliggende aktiv.

$\sum_J P(t,t_J)\delta(t_J)$: Nutidsværdien af dividender. Divende betalinger diskonteret tilbage til start tidspunkt.

Prisen på en NKO for udenlandsk og indenlandsk kan skrives som:

$$P^{DOM}(t,T) = e^{-r_{dom}}(T-t)$$

$$P^{FOR}(t,T) = e^{-r_{for}}(T-t)$$

Prop 13 kan skrives som:

$$FWD(t,T) = \frac{X(t)P^{For}(t,T)}{P^{DOM}(t,T)}$$

Bevis: variant af carry argument: Spg. 3a frra Fin1-eksamen juni 2014.

Optionsteori

Call-optioner giver ret til at købe til aftalt pris, put-optioner til at sælge. FWD. adskiller sig fra optioner ved at man ved FWD kontrakter både har ret og pligt til at købe et givet aktiv. Omvendt for optionr har man kun ret men ikke pligt.

De grundlæggende byggesten for optioner er: Call-optioner (købsoption). Put-optioner (salgsoption). Call-option giver ret men ikke pligt til at købe et aktiv på tidspunkt T(udløb,"expiry" til en bestemt pris K (strike kurs), men ikke pligt.

Amrikansk option har sin egen indfrielse tidspunkt. Omvendt for europæisk som har et bestemt indfrielses tidspunkt,men har ingen geografisk betydning.

Værdi af call-optioner på tid T: payoff:

- Hvis $S(T) \leq K$): markedsprisen er lavere end kursen. Så kan jege smide min option væk, så er betaling 0, får ingen penge. Hvis $S(T) \geq K$, så kan jeg indfrie optionen, benytte retigheden til at købe til kursen K. Dernæst kan jeg sælge den til $S(T)$. Dvs. Payoff bliver $S(T) - K$

Dettee kan noteres som:

$$Call(T) = MAX\{0, S(t) - K\}^{+}$$

+ betyder positiv del.

Hvor jeg får en batling på 0 når; $S(T) \leq K$) og få en betaling på $S(t) - K\}$ når $S(T) \geq K$

FOr en put option:

$$Put(T) = (K - S(T))^{+}$$

Afsnit 2.2

Definition 1: A financial market consists of a pair (π, C) where π ∈ R N and C is an N × T−matrix.

Definition 2: A portfolio ϑ is an element of R^N . The payment stream generated by ϑ is $C^T\vartheta \in R^T$. The price of the portfolio ϑ at date 0 is π · ϑ = π ⊤ϑ = ϑ ⊤π.

where π ∈ R^N and C is an N × T−matrix.

Definition 3. A portfolio ϑ is an arbitrage opportunity (−π · ϑ, C⊤ϑ) > 0.

Definition 4. The security market is arbitrage-free if it contains no arbitrage opportunities.

Theorem 1. The security market (π, C) is arbitrage-free if and only if there exists a strictly positive vector d ∈ R^T_{++}such that π = Cd. The first fundamental theorem tells us that the search for arbitrages comes down analyzing the solution space to π = Cd

Definition 5. The security market is complete if for every y ∈ R T there exists a ϑ ∈ R N such that C ⊤ϑ = y.

Theorem 2. Assume that (π, C) is arbitrage-free. Then the market is complete if and only if there is a unique vector of discount factors

Definition 6. The payment stream of a zero coupon bond with maturity t is given by the t ´ th unit vector et of R T .

Proposition 1. The price of a zero coupon bond with maturity t is dt .

Definition 7. The short rate at date 0 is given by

$$r_0 = \frac{1}{d_1} - 1$$

The one-period time t-forward rate at date 0 is

$$f(0,t) = \frac{d_t}{d_{t+1}} - 1$$

where $d_0 = 1$ by convention.

The interpretation of the short rate ("short" here means "over the next short timeperiod", not "short" as in "having sold") is straightforward: Buying 1 d1 units of a maturity 1 zero coupon bond costs 1 d1 d1 = 1 at date 0 and gives a payment at date 1 of 1 d1 = 1 + r0. The forward rate, less obviously, tells us the rate at which we may agree at date 0 to borrow (or lend) between dates t and t + 1.

Definition 8. The yield (or yield to maturity or zero coupon rate) at time 0 of a zero coupon bond with maturity t is given as

$$y(0,t) = (\frac{1}{d_t})^{1/t} - 1$$

Definition 9. The term structure of interest rates (or the yield curve) at date 0 is given by (y(0, 1), . . . , y(0, T)).

Definition 10. The yield (or yield to maturity) of a security c ⊤ = (c1, . . . , cT) with c > 0 and price π is the unique solution y > −1 of the equation

$$\pi = \sum_{i=1}^{T} \frac{c_i}{(1+y)^i}$$

Afsnit 2.3

Definition 11. An annuity with maturity τ, principal F and coupon rate R is a bond whose payments are constant between dates 1 and τ , and whose principal evolves according to Equation (2.2).

Definition 12. A bullet bond1 with maturity τ , principal F and coupon rate R is characterized by having it = ct for t = 1, . . . , τ − 1 and cτ = (1 + R)F.

Forelæsning 3

Proposition 16

$$call_t - put_t = S_t - KP(t, T)$$

Strike-K. Expiry-T call and put denote prices. S_t = spot pris (kurs). KP diskonteret strike. P=NKO. S leddet bliver anderledes på en eller anden måde hvis der er dividender.

Collary 3 er en mere generel put/call-paritet. I collary 3 tager den også udgangspunkt i dividender men på en måde der er svær at gennemskue.

Put call pariteten gælder når vi har en arbitrage fri model og altså ingen aåbenlyse pengemaskiner.

Put/call pariteten kan fange fejlagtig intuition Fx. "hvis den forventede værdi af S(T) stiger, så stiger call-prisen" per samme argument skulle put-prisen fald, men det er i modstrid m/ fast højreside i put-call-pariteten.

Den fortæller at hvis vi kan prisfastsætte call-optioner, så kan vi hurtigt prisfastsætte put optioner.

Put/call-prisen holder måske ikke heldt i virkeligheden eftersom at køb og salgs pris på optioner ikke altid er helt ens.

Højre side er fast hvis man kun siger at forventningen til prisen på T stiger, ogs hvis man siger at call prisen stiger hvilket fører til et fald i put prisen så vil proposition 16 ikke længere holde.

De individuelle optioner fortæller noget om markedets volatilitet. og kan bruges forsigtigt til at tolke usikkerheden på markedet.

Call-put optioner har samme implicite volatilitet hvis strike og udløbsdato er ens.

Spg. 3b MatFin1- jan 2018

Svar: Put-call-pariteten siger at

$$call(t) = put(t) + S(t) - K$$

Call-optionen kan altså ses som en lang position i aktien (+S) og u put'en (+put), samt en kort position i bankbogen (NKO: K), vi har lånt K kroner som er en gearert position i NKO. Man har altså købt sine aktiver for (delvist) lånte penge, som er en gearet position. Put-optionen har positivt pay-off når aktien kurs falder (til under striken) og kan ses som en tabsforsikring. Call-option er en gearet position men med en tabsforsikring. Vi kan ikke tabe mere end invisteret.

Gearet position betyder at vi har lånt penge for at invisteret i noget andet. eks. aktie kurs=1 og jeg har 10 kr. så kan jeg købe 10 aktier. eller jeg kan tage mine 10 kr. og lån 90 kr. og derfor købe 100 aktier. Man invistere for lånte penge. Her får man ganget sin afkast op. Derfor vil jeg ved en stigning i kursen på 10% få 10 kr. for min lånte penge fremfor kun 1 kr. hvis jeg ikke havde lånt penge og kun købt 10 aktier. Gearet positioner betyder at vi kan tabe mere end vores initiale invistering. Hvis jeg køber en option kan jeg godt tabe alle penge invisteret, hvis optionen bliver “out of money”, men jeg kan ikke tabe mere en jeg har invisteret.

Spg. 3a MatFin1- Okt. 2017

Konvertertbart lån betyder at man kan tilbagebetale hele lånet når som helst i låne perioden. Fx lånt 5 mil som betales tilbage over 30 år, så går lånet på at betale noget af på renter og resten på hovedstol. Hvis det er konverterbart kan tilbagebetale de 5 mil når som helst. I praksis betaler man et lån tilbage før tid med et nyt lån. Det kan betale sig hvis markedsrenten er faldet.

Amerikansk option har ikke en fast indfrielse omvendt for europæisk. Amerikanske optioner har man ret til at indfrie optionen før tid. Konvertibel obligation er en betegnelse for virksomheds obligationer hvor deres obl. kan byttes ud til aktier.

Svar: Så længe låntager ikke konvereter så betaler han rente og afdrag som på et alm. lån, hvilket svarer til en kort position i en obligation; man har solgt obligationen mod at få nogle penge i hånden på tid 0.

Når/hvis der konverteres, så betaler låntager den resterende hovedstol, men har så ikke nogen fremtidige forpligtelser. Det kan vi se som at man køøber en inkoverterbar obligation hvorefter betalingerne i fremtiden fra den lange og den korte position netter ud.

Indfrie call option betyder at jeg betaler strike kursen S. Så skal jeg betale ht kroner men så får jeg den underliggende obligation.

Konverterbart lån er ligesom at have en kort position i et inkoverterbart obligation, men konverteringsrettigheden er ens med en amerikans call-option.

Hvorfor kan låntager have lyst til at betale sit lån tilbage?

Det kan betale sig hvis markedsrenten er faldet, hvor man så kan optage et nyt lån på nye vilkår for at betale det gamle tilbage. Dette er ikke bare godt for udlåner, fordi så skal udlåner ud og geninvestere pengene til en lavere markedsrenten fremfor at have en låntager som blot betaler sit lån af til en højere markedsretne.

Spg. 4b MatFin1- Nov. 2016

Kort før EU-afstemningen gav bookmaner odds 5 på at Storbritanien stemte for at forlade EU, Brexit.

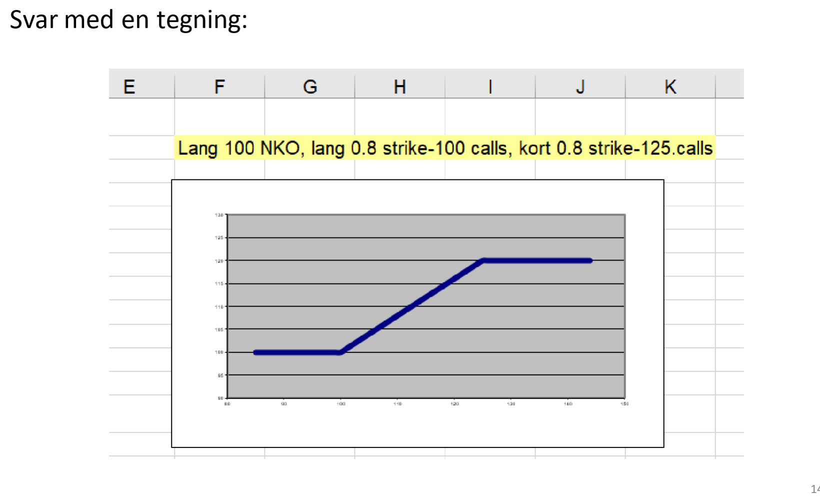
Argumenter for at når rentediskonterin ignoreres så viser dette at den risikoneutrale ssh for leave var 1/5.

Svar: Vædder man 0.2 på leave får man 1.kr igen i tilfælde a leave, 0 ellers. Det er en digital optionspris. Og sådan en er per konstruktiuon (når vi gelmmer rentediskontering) Q-shh for udfaldet.

Hvis man fokusere på valutakursen; kan man bruge dollars til at spille på leave og pund for at spille på remain. Derved vil ens gevinst ved remain stige fordi man kan forvente en yderlig stigning i punden hvis Strobritaninen forbliver, omvendt satser man på leave kan man forvente at punden bliver svækket og ens dollar bliver omvendt styrket.

Swaption

Swaption er en option på en option på en swaprente. Det underliggende aktiv kan godt være noget kompliceret vi har udledt ud fra noget andet analyse, men kan også godt være en aktie.



X-aksen viser aktie kursen på tidspunkt T=3. Y-aksen er betalingen fra IFN-kontrakten. Hvis iFN-kontrakten koster 100 kr. er dette så en fair pris? Umiddelbart ser det meget godt fordi man altid kan få penge tilbage og kun vinde penge. Men IRL er det ikke en god foretning. At få 100kr. Tilbage efter 3 år. Er ikke nødvendigivs en god deal eftersom 100 kr. ikke lange er det samme værd efter 3 år.

A swap contract is an agreement to exchange one stream of payments for another.

Forelæsning 4

T-NKO priser: P(t,T). er prisen på tidspunkt t til udsløbstidspunktet T.

Betaler 1 på tid T, 0 ellers.

For fast t, kan vi se på funktionen (diskonteings fkt/kurve) T–>P(t,T). Vi ser på forskellige løbetider.

τ-Nulkopnrente: Den effektive rente på en NKO med tid τ til udløb

$$P(t, t+\tau) = \frac{1}{(1+y(t,\tau))^{\tau}}$$

Ovenover kalder man for NKO-renterne

$$\tau \to y(t, t+\tau): \text{ Nulkuponrentestrukturen/kurven}$$

Renterne er lavere for korte løbetider vs. langeløbetider.

Inversrentestruktur er hvor laveløbetider har højere renter en langeløbetider. Der er et tegn på en forestående reccision. Dermed vil de have højere renter for kortsigtede investeringer. Inversrentestrukturer har kun forudset 5 ud af 10 recisioner.

Forwardrente, $f(t, T)$. Det er den rente vi på tid t kan aftale for et (ind) lån på et fremtidigtidspunkt fra T til T+1.

For at udngå arbitrage må vi have at:

$$f(t, T) = \frac{P(t, T)}{p(t, T+1)} - 1$$

Det man betaler tilbage på tid T+1 er 1(lån) + $f(t, T)$(renten).

På tid t: Køb 1 T-NKO. sælg $\frac{P(t,T)}{P(t,T+1)}(T-1)-NKO$, hvor $\frac{P(t,T)}{P(t,T+1)}$er antal stk. og er kendt på tid t for ellers vil der være arbitrage muligheder.

$$\frac{P(t, T)}{P(t, T+1)} P(t, T+1) \to Netto : 0$$

Tid T: Vi modtager 1

Tid T+1: VI betaler $\frac{P(t,T)}{P(t,T+1)} * 1$

Forelæsning 5 (21/09-2022)

FWD-Renter:

$$f(t, t) = \frac{1}{p(t, t+1)} - 1$$

hvor, $f(t, t)$ er "spot" lån og $p(t, t+1)$ NKO der udløber om en periode, kan fortolkes som en rente. $\frac{1}{p(t,t+1)} - 1$ dette er kendt på tid t.

Rente-swap-kontrakt

En swap-kontrakt bytter en betalingsrække for en anden.

En plain rente-swap bytter fast mellem flydende rente på et lån. Ved SWAP kontrakter modtager man en flydente rente og betaler en fast rante i hver periode. En variabel rente kunne være FWD-renten, y, der er en spot rente, hvilket vi ikke kender i perioden t+1 (fremtiden).

Lån

Der findes ståendelån hvor man betaler kuponrenten i hver periode og til sidst kuponrente + resterende hovedstol. Det er det ultimative afdragsfrie lån.

Konstant afbetaling i et anuitetslån: Et annuitetslån er en form for lån, der tilbagebetales med afdrag, der forfalder med lige store tidsintervaller. Typisk vil betalingerne også være lige store

Serielån (2.3) noter. :Serielån fungerer på den måde, at du betaler det samme i afdrag hver termin på dit lån, mens renteudgiften falder med tiden.

Forelæsning 6 (22/09-2022)

En periode-binomialmodel: aktien gå op til uS elkler ned til dS. Vi ved ikke om kursen går op eller ned, men vi ved hvor den lander hvis den går op og ned.

slide 10: vi skal have at u>R>d, for at der ikke er arbitrage.

E^q er en middelværdi med en ssh-værdi q, hvor $q = \frac{R-d}{u-d}$.

højere renter giver højere call-option priser. Det bliver dyere at replikere call-optionen hvis renten stiger og derfor stiger call option prisen.

Afsnit 4.2 The single period model

The price of the portfolio ϑ bought at time 0 is π · ϑ.

Definition 18

An arbitrage in the security price system (π, D) is a portfolio ϑ which satisfies either π · ϑ ≤ 0 ∈ R and D ⊤ϑ > 0 ∈ R S or π · ϑ < 0 ∈ R and D ⊤ϑ ≥ 0 ∈ R S

Proposition 7.

A security price system is arbitrage-free if and only if there exists a state-price vector.

Proposition 7: En model/marked err arbitrage fri hvis den har en tilstandsprisvektor. Det er vores første hovedesætning.

Forelæsning 7 (28/09-2022)

ω betyder: i en bestemt tilstand.

Forelæsning 8 (video: 22-23/09)

Proposition 9: Arbitrageteoriens 2. hovedesætning: En arbitrage fri model er komplet hvis den har præcis 1 tiulstandsprisvektor. Komplethed: finde basis for S for n betalingsvektorer.

Når vi skal vise at modellen er arbitrage fri og vi får givet π og D. så ved vi at vi skal finde $\psi \in R^n$, hvor (a) $\psi_i > 0$ for alle i, (b) $\pi = D\psi$. D matricen er større end pi kan man dele D matricen op.

Der må ikke være negative koordinater for hvis der skal være arbitrage. De gode gæt er 1/ antal tilstande. Eks. 1/5.

En svag arbitrage som eksempel kan være gratis lotokuponer. Du har her mulighed for at få gevinst men det er ikke sikkert og du får garanteret intet tab. Streng arbitrage ville være hvis du fik alle loto kupponer så du vidste præcis hvor mange penge du vil få.

Forelæsning 9: 5/10

Nyttemaksimering er kun muligt hvis og kun hvis der ikke er arbitrage muligheder.

c: betegner ofte agentens forbrug i nyttemaksimeringsformlen:

$$\max_{\Theta \in R^N} U(D^T\Theta + e) = \text{Forventet nytte}$$

Stateprive utility function:

Når $\lambda > 0$ så:

$$q_j = \lambda(p_j u'(c_j^*)$$

Hvis man har stor pj ssh så har man også høj qj (tilstandspriser) ssh.

Tilstande med høj marginalnytte betyder at u' er stor. Det betyder også at tilstandspriserne er høje. Det kræver at vi har lavt forbrug c for at opnår høj marginalnytte/tilstandspriser. Dette er altså dårlige tilstande.

Intuition: Vi ser at der er et aktiv der giver høje udbytter ved dårlige tider. Så en risikoavers investerster vil gerne købe dette aktiv, hvilket betyder at tilstandspriserne er høje eftersom aktivet er atraktivt.

Vi kan finde en agents optimale forbrug ved at:

$$c_J^* = u'^{-1}(\frac{q_j}{p_j\lambda})$$

Hvor vi kender q_j og p_j (komplet).

Example 20 i noterne er ikke eksamensrelevant.

Afnsit 5

En fler-periode.model er bygget op af 1-periode modeller

For at finde prisen i “træet” benytter vi prisfastsættelsesreglen:

$$pris(t) = \frac{1}{R}E_t^Q(pris(t+1))$$

Forelæsning 10: 6/10

Generel put-call paritet:

$$call(0) - put(0) = p(0,T)[FWD(0,T) - K]$$

$FWD(0,T) - K$ hvis disse er ens så har vi har at call=put.

Afkastrate:

$$t \to t+1 = \frac{pris(t+1)(+dividende_{t+1}) - Pris(t)}{pris(t)}$$

For at beregne spredningen skal vi først finde E(X) dernæst variansen af X og til sidst har vi spredningen som er $\sqrt{var(x)}$. I excel bruger vi “stadfv.p”.

Man kan kun bruge stadf.p når alle udfald har samme ssh. for givet udfald. Ellers skal man bruge definitionen for middelværdi.

Vi ser at modellen er arbitragefri ved først t se at alle 1-periode-modeller er arbitrage fri. Og vi ser at modellen er komplet ved først at undersøge at alle 1-periode-modeller er komplette.

Man kan godt have en inkomplet model der er arbitrage fri.

Standardbinomialmodel

Følgende formel vor exp-fkt. med taylor udvikling er:

$$u\Delta t + o(\Delta t)$$

hvor $u = \alpha + \sigma^2/2$ og $o(\Delta t)$ er noget småt/restled.

Men uden taylor så får vi:

$$E_t^P\left(\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t}\right) = \frac{1}{2}(u-1) + \frac{1}{2}(d-1)$$

Volatiliteten bestemmer usikkerheden i modellen.

Black-scholes model kan tænkes som en standardbinomial model med små tidsskridt.

Forelæsning 11: 12/10

Der kan komme konseptuelle eksmanesopgaver i Black Scholes modellen. Det betyder at man ikke skal kunne noget teknisk men blot et begreb. Som emplicit volatilitet.

I black scholes modellen findes der er en formel for call optionen.

Jo højere volatiliteten er destor højere call option prisen. Det er en egenskab fra kontiunitet af pay-off-funktionen. Call-optionen er voksende i volatilitet.

Fordeling af aktiekursen ude i fremtiden er bestemt af volatiliteten. Og konveksiteten af pay-off-funktionen den giver sig udtryk ved at optionpriserne er voksende i volatiliteten.

Ofte angiver markedsdeltagere implicit volatilitet i stedet for priser.
Implicitte volatiliteter er aftagende i strike.

Forelæsning 12: 13/10

Hvis der ikke står noget om dividende udbetaling til eksamen så er der ingen dividende udbetalinger.

For at se om en 2-periode-model er arbitrage fri, så undersøger vi alle 1-periode-modellerne i 2-periode-modellen. Dernærst beregner vi u, d og q. Vi ser at hvis $u \neq d$ i alle 1-periode-modeller så er hele modellen komplet. Og hvis $0 < q < 1$ for alle 1-periode-modeller så er hele modellen arbitrage fri.Hvor q er en risikoneutral ssh. $q = \frac{R-d}{u-d}$. Desuden kan vi se på om betalingsmatricen er invertibel, hvis ja så er den komplet.

Til spørgsmål "Hvad siger traderen".
Model fri sammenhæng mellem put og call optioner, hvilket er hvad put-call-pariteten siger. Out-of-the-money optioner er de mest likvide markeder. put optioner med lav strike og call-optioner med høj strike.
I aktie og rentemarkeder ser man typisk skew, dvs. implicit volatilitet er aftagende

Vi kan beregne den betingede ssh. for at ende i en bestemt slutknude ved følgende eksempel:

$$p = \frac{P(A_{2,2})}{P(A_{1,1})}$$

hvor $A_{2,2}$ er slutknuden i træet på tidspunkt 2 knude 2. Og $A_{1,1}$ er slut knuden på tidspunkt 1 knude 1 (op).

Martingal
$\mu = E(x_t)$. Det er et fair spil hvis $\mu = 0$. Det er gunstigt hvis μ er positivt og jeg taber i det lange løb hvis μ er negativ.
Det er en martingal hvis $\mu = 0$. Vi siger at $G(t) = \sum_{i=1}^{t} X_i$= samlet gevinst eller tab. Hvor G(t) er martingal hvis mu=0.

Forelæsning 13: 14/10

Arbitragefri hvis den har martingalmål. Den er komplet hvis martingalmålene er entydige.
Kommer ikke en martingalopgave i ren form.
Tag det hele et skridt ad gangen det er en stokastisk process der er martingal. Middelværdi af x_0 =0 uanset tidspunkt t.

$R_{s,t}$ den værdi vi har på tidspunkt t af 1 kr. sat i banken på tid s.
netto inflow δ_t^{ϕ}= $\phi_{t-1} * (S_t + \delta_t) - \phi_t * S_t$: hvor $\phi_{t-1} * (S_t + \delta_t)$ er hvad jeg har. og $\phi_t * S_t$ er hvad jeg skal købe.

'Udtrykke selvfinansierings strategien er hvor $\phi_{t-1} * (S_t + \delta_t) = \phi_t * S_t$, hvor $\delta_t^\phi = 0$

Forelæsning 14: 20/10

Arbitragefri priser findes med q ssh. Men afkastrater bruger p ssh.

Annualiseret (årlige afkastrate) $V^\phi(T)$ er den forventede afkast rate på tid T.

forventede afkastrate $\mu = (E(\frac{V^\phi(T)}{V^\phi(0)}))^{\frac{1}{T}} - 1$, hvor vi kan omskrive til:

$$V^\phi(0)(1+\mu)^T = E(V^\phi(T))$$

Dividende geninvesteres:

Eksempel. S(0)=100, S(1)120 u, ds(1)=90 med begge udb. 2 i dividender:

Derfor køber jeg: 2/120 stk. aktier og i ned tilstanden får 2/90aktier

Til slut bliver min værdi stiafhængig. Mine aktier afhænger ikke kun at værdien af akiten til slut.

I v(2) ganger jeg ssh. på og slut værdien af aktien. Den sammenligning man laver med markedet, her skal man også huske dividende udbetalinger for at gøre det til en fair sammenligning.

Q-forventede afkastrater er den risikofrie rente.

replikere call option med selvfinansieringsstrategi.

Grunden til at t>=1, for $X_t = \delta_t^\phi$ skyldes at vi kan replikere fremtidig betalingsstrøm men ikke selv bestemme hvad det koster. Ellers kunne vi altid replikere arbitrage strategier.

SSh mål kræver at man har skrevet ssh. på grenene.

Sandsynlighedsmålet Q kaldes et martingalmål for modellen (S, δ, ρ) hvis

$$\tilde{S_t^i} = E_t^Q(\sum_{j=t+1}^{T} \tilde{\delta}_j^i)$$

tilde betyder at prisen/bankbogen er divideret R.

Ovenstående lignign kan skrives som:

$$S_t^i = E_t^Q(\frac{S_{t+1}^i + \delta_{t+1}^i}{1+\rho_t})$$

Hvis der er arbitrage i blot en 1-periode-model så er der også arbitrag i hele periode-modellen.

For at se om en model er et specialtilfælde af standard binomialmodellen, så kan man se på u'erne og d'erne. Hvis de ikke er ens så er det ikke et specialtilfælde af standard binomialmodellen.

Forelæsning 15: 26/10

Cross-Currency betting er ikke pensum i år. Der kan godt komme opgave om ods.

Ingen eksamensopgaver i martingal i renform.

man aflevere en pdf. Hvis du laver i excel, så lav dem om til pdf. Kan være det er en god ide at skrive forklaring til hvordan du udregner opgaverne.

Futures kontrakter afregner tab/gevinst løbende. Altså en forward kontrakt hvor tab/gevinst bliver afregnet løbende.

Egeren af en futureskontrakt modtager et beløb som er ændringen på FUT(t,T)-FUT(t-1,T), hvor FUT er futures pris. Som er en kummulativ dividende process. Som på udløbtidspunktet er spotprisen.

I noterne er $FUT = \Phi$.

Proposition 15

E^Q er den q forventede ssh.

Hvis renten er stokastisk så er FWDnot=FUT. Omvendt hvis renten er diterministisk.

VI er i en situation som i prop 11,12 eller 13, så handler det blot om at regne den forventede værdi.

En futurekontrakt har løbende betalinger mens forward har betaling til sidst.

Samme multiplikative op og ned ssh for at det er en std. binimoialmodel.

Beregn fut priser for en aktie der udløber på tid 2; eksempel, med deterministisk rente:

$$Fut(t,2) = E_t^Q(S_2)$$

Future prisen på tid 1 op: $q * S(2)_{up} + (1-q) * S(2)_{ned}$

Future prisen på tid 1 ned: $q * S(2)_{up} + (1-q) * S(2)_{ned}$

I periode 0 bruger vi vores torn egenskaber:$q * tid1op + (1-q)tid1ned$

$$Q(S_2 = ...) = \begin{cases} 144(eksempel) & 1/4 \\ 108 & 1/2 \\ 81 & 1/4 \end{cases}$$

Vi ved også at $S(0) = \frac{1}{1,05^2} E^Q(S_2) \Rightarrow 1,05^2 * 100 = E^Q(S_2) = Fut(0,2)$

Dette er blot en anden måde at regne Fut ud på. Gælder dog kun hvis vi har en deterministisk rente uden dividende.

Amerikanske optioner giver egeren flere rettigheder. En europæisk option har kun et fast indfrielsestidspunkt.

Jeg indfrier en amerikansk option hvis den er mere værd død end i live. Då bliver det værdien af optionen i den bestemte knude. Hvis optionen er mere værd i live end død så indfrier vi ikke.

Hvis vores markedsmodel vi får givet i starten af opgaven har en markedspris S(0) på 100 og vi kigger på en option med strike prisen 70 og 110, så vil i tilfældet af at strike prisen = 70, være in-of-money. Det betyder at stigende volatilitet σ vil få optionspriserne til at falde. Omvendt for tilfældet for options strike på 110. Der har vi out-of-money hvilket betyder at stigende volatilitet vil få optionspriserne til at stige.

Forelæsning 16: 27/10

Amerikanske option

For amerikanske optioner gælder det at:

$$\pi_t^{AMR} = MAX(g(S_t), \frac{1}{1+r_t} E_t^Q(\pi_{t+1}^{AMR}))$$

hvor $g(S_t)$ er den indre værdi. Vi finder ud af hvornår det er optimalt at indfrie optionen. Vi indfrier optionen hvis vi ikke har indfriet den før.

Amerikanske put call optioner er ikke ens: Hvis aktien ikke udbetaler dividende i livstiden for den givende option og renten er positiv. Så skal vi altid holde en amerikansk call til udløb. Det er aldrig optimalt at indfrie amerikanske call option før tid.dvs. prisen $\pi_t^{CallAMR} = \pi_t^{call,EU}$. Dette gælder ikke for put optioner.Antager at $S(t)$ (aktiekurs) > strike i t<T (tidspunkt før udløb).$\pi^{CALL,AMR} \geq \pi^{call,EU} - \pi^{pu,EU} >$ put call pariteten hvor div=0: $S_t - p(t,T)K$, hvor $P(t,T)$ er NKO pris. Det betyder at Amerikanske call option pris er skarp større end $S(t) - K$, hvor $S(t) - K$ er vores fortjeneste. Konklusion, ikke indfri amerikansk option.

Det kan godt være optimalt at indfrie en amerikansk put option før tid med en positiv rente.

Hvis vores amerikanske option skulle opfilde lokalkarakterisationen, dette gælder dog ikke for amerikanske optioner. Det vil betyde at vores amerikanske option skulle være lig $\frac{1}{1+r_t} E_t^Q(\pi_{t+1}^{AMR})$. En Amerikansk option der er betaling ikke kun bestem af markedet men også vores modpart.

Stokastisk rente

I stokastiske rente modeller får man givet r og den risikoneutrale ssh. Men i opgave får man ikke disse varaible givet og skal selv regne dem ud. En model med stokastisk rente, her skal man specificere den korte retne og q ssh. Det er bla. disse opgaver hvor vi beregne NKO-priser.

Prisen på en NKO:

$$P(t,T) = \frac{1}{1+r_t} E_t^Q(p(t+1), T))$$

Hvis jeg lånet penge, dvs. har jeg solgt en obligation.

Jeg indfrier mit lån hvis det bedre kan betale sig at betale den resterende hovedstol. Dvs. markedsrenten er lavest. Dvs. lavere end renten på tidspunkten hvor vi optog lånet.

Opgaver

Bestem alpha og sigma:

Lav en matrix i excel og tag ln(u) og ln(d), så vi får;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} ln(u) \\ ln(d) \end{pmatrix} = \begin{matrix} alpha \\ sigma \end{matrix}$$

Se Matfin 2016 nov, hvor dette gøres for en std. binomialmodel.

Hvis en option kan købes til pris 0 så er det arbitrage, hvis der er tid 1 tilstande hvor payoff er strengt positiv.

$$(S1(1) + S(2))^+$$

plus betyder at man skal i Excel bruge funktionen: MAKS(S(1)-S(2),0)