

Information, stokastiske processer, betinget middelværdi, martingaler

Matematisk Finansiering 1
Efterår 2022

12. oktober

Matematisk beskrivelse af information

Det flg. står – ganske kompakt – på de første par sider i afsnit 5.2 i noterne. Og i starten af kapitel 3 i Röman, I.

Det virker måske abstrakt/underligt/svært, men tro mig, man vender sig hurtigt til det.

For stringent at opstille betingelser for fravær af arbitrage i fler-periode modeller er det nødvendigt at beskrive informationsudviklingen/afsløringen/flowet over tid.

Tag som eksempel et binomialtræ i 2 perioder: Hvis tilstand u realiseres på tid $t = 1$, er det givet, at tilstanden på tid $t = 2$ vil være uu eller ud . Tilstanden realiseret på tid t indeholder information om tilstandsrummet på tid $t + 1$.

Informationsflow kan beskrives vha. et *filter* (udenlandsk: *filtration*). Præcis definition kommer på næste slide.

Specielt kan vi med filtre give præcis mening til udsagn som “På tid t ved vi, hvad aktiekursen på tid t er;. Vi kender [måske] endda hele dens historik”.

Informationsmængde og filter

Ω : Udfaldsrummet; en abstrakt mængde af ω 'er. Senere: Et ω svarer til en bestemt sti igennem træet/gittret.

Informationsmængde: En mængde af delmængder (et mængdesystem) af Ω , som er lukket under (almindelige) mængdeoperationer (foreningsmængde, fællesmængde, difference og komplementærmængde). (Forklar det underlige 2^Ω .)

En informationsmængde betegnes ofte med \mathcal{F} og kaldes også en σ -algebra.

En (endelig) informationsmængde er i 1-1-korrespondance med opdeling af Ω i disjunkte delmængder; en klassesdeling (*partition*) i atomer.

Atomerne kan vi tænke på som de ting/hændelser, vi kan skelne imellem med den givne information. (Det er derfor informationsængder skal være lukkede under mængdeoperationer.)

For to informationsmængder skriver vi $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, hvis $A \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow A \in \mathcal{F}_2$; i ord: \mathcal{F}_1 har mindre information end \mathcal{F}_2 .

Et **filter** er en familie af voksende informationsmængder, indekseret f.eks. ved tiden $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,2,\dots,T}$:
 $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}$. (Summepsg.: Hvorfor er $\{\emptyset, \Omega\}$ den mindste informationsængde?)

En helt central indsigt for de endelige, diskrete modeller, vi arbejder med er:

Et filter kan repræsenteres grafisk (tegnes) som et træ.

Knuderne i træet svarer til atomerne.

Det gør, at man langt hen ad vejen kan ignorere de foregående slides' abstrakte nonsens.

Advarsel: I kontinuerttidsmodeller, MatFin2 fx, går det ikke så "tegn et træ"-nemt.

Formelt set har et træ en tidsmæssig orientering (vi kører en vej ad x-aksen), men ikke en rumlig, selvom vi tegner en y-akse, gi'r "op/ned" ikke altid mening; tænk på en model med to aktier.

Nogle processer, såkaldte Markov-processer, kan repræsenteres på et gitter — det er en subtilitet, vi vender tilbage til. Senere.

Filter for møntkast

Læs selv: Eksempel 21 fra noterne.

Overvejelse: Kast med 5'er & 10'er vs. kast med to 10'ere.

Et filter kan være frembragt af en bestemt stokastisk proces.

En (relevant) stokastisk proces kan også indeholde mindre information end et givet filter. (Case in point: Vores samlede gevinst.)

Filter for aktiemodel

En models filter kan være genereret af en aktiekurs. I så fald er \mathcal{F}_t den information, der ligger i aktiekursens udvikling op til og med tidspunkt t .

Et atom udgøres her af en delmængde af Ω , hvor aktiekursen er konstant. Atomer i \mathcal{F}_t betegnes a_t .

Hvis atomet a_t realiseres på tid t , afsløres implicit, at et atom $a_{t+1} \subset a_t$ vil realiseres på tid $t + 1$.

Filter for aktiemodel

Atomer opsplittes i mindre atomer (på trods af at det egl. betyder “udelelig”), som tiden går. **Splitting index** er antal atomer a_{t+1} , som a_t splittes i.

Det ikke er muligt, at definere finansielle fordringer, hvis værdi i hvert atom ikke er konstant. Informationen tilgængelig i filtret må nødvendigvis afsløre fordringens værdi.

Et filter siges at være fuldt **afslørende**, hvis filteret afslører præcis hvilket atom, der realiseres. Enten ret trivielt eller dybt. Sker nogle gange i opgaver — **fx spg. 2a fra oktober 2014-eksamen** — dog ikke i 2022.

Følger afsnit 5.3 i noterne.

\mathcal{F} -målelig: X er \mathcal{F} -målelig, hvis værdien af X er kendt givet informationen \mathcal{F} . Dvs. X er konstant på hvert atom i \mathcal{F}

Lad Y være stokastisk variabel målelig mht. informationsmængde med atomer a_t^1, \dots, a_t^m . Da er

$$Y = \sum_{j=1}^m Y(a_t^j) \mathbf{1}_{\{a_t^j\}}$$

(\mathcal{F}_t) -tilpasset: En stokastisk proces (X_t) siges at være tilpasset (\mathcal{F}_t) , hvis X_t er \mathcal{F}_t -målelig for ethvert t . (Det skrives nogle steder $X_t \in \mathcal{F}_t$; ikompakt, men ikke helt ideel notation.) En tilpasset proces specificeres altså ved at “skrive tal på knuder i et træ.”

Forudsigelig (*predictable*): En stokastisk proces (X_t) er forudsigelig, hvis $X_t \in \mathcal{F}_{t-1}$ for alle $t = 1, \dots, n$.

Betinget middelværdi (eller: forventning)

Lad X være en stokastisk variabel og a_t^i , $i = 1, \dots, I$ være atomer i informationsmgd. \mathcal{F}_t .

Den betingede middelværdi af X under sandsynligheds målet P betinget med informationen \mathcal{F}_t defineres som

$$E^P[X|\mathcal{F}_t][a_t^i] = \sum_{\omega \in a_t^i} X(\omega) \frac{P(\{\omega\})}{P(a_t^i)}$$

$E^P[X|\mathcal{F}_t]$ er en \mathcal{F}_t -målelig stokastisk variabel.

Da $\{\omega\} = \{\omega\} \cap a_t^i$ inde i summen, så er det bare middelværdi med betinget sandsynlighed. Tillige med en masse bogholderi, som notationen i høj grad håndterer.

Hvis X_{t+1} er \mathcal{F}_{t+1} -målelig, så har den betingede middelværdi formen

$$E^P[X_{t+1}|\mathcal{F}_t][a_t^i] = \sum_{j:a_{t+1}^j \subseteq a_t^i} X(\omega) \frac{P(a_{t+1}^j)}{P(a_t^i)}.$$

Det viser, at det vi regner ud i træ, når vi trævler os baglæns og bruger “det, der står på grenene”, der er betinget middelværdi. Dvs. vi har regnet betingede middelværdier ud uden at vide det.

Betinget middelværdi – regneregler

- 1 Betinget middelværdi er lineær:

$$\begin{aligned} E[kX + Y|\mathcal{F}_t][a_t^i] &= \sum_{\omega \in a_t^i} (kX(\omega) + Y(\omega)) \frac{P(\{\omega\})}{P(a_t^i)} \\ &= kE[X|\mathcal{F}_t][a_t^i] + E[Y|\mathcal{F}_t][a_t^i] \end{aligned}$$

- 2 En \mathcal{F}_t -målelig stokastisk variabel Y kan trækkes uden for den \mathcal{F}_t -betingede middelværdi:

$$E[XY|\mathcal{F}_t] = YE[X|\mathcal{F}_t]$$

3 Itererede betingede forventninger (tårn-egenskaben):

$$0 \leq t \leq u: \quad E\left[E[X|\mathcal{F}_u]|\mathcal{F}_t\right] = E[X|\mathcal{F}_t]$$

Bevis: Man skyder et (tids)punkt ind og stirrer på nogle summer.

- 4 (Projektionsegenskaben.) Den betingede forventning af en stokastisk variabel X er den bedste forudsigtelse af X 's værdi i 'mean-square'-forstand blandt \mathcal{F}_t -målelige variable:

$$E[X|\mathcal{F}_t] = \arg \min_{Y \in \mathcal{F}_t} E[(X - Y)^2]$$

Bevis: Example 22 (= en gammel Fin1-eksamensopgave).

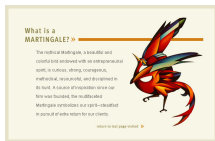
Martingal — iflg. Googles billeder



(a) Seletøj



(b) Roulette-relateret



(c) Nonsens

Martingal — matematisk

En tilpasset stokastisk process (X_t) er en \mathcal{F} -martingal, hvis $E[X_t] < \infty$ for alle $t = 1, \dots, T$ og

$$E[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = X_{t-1}, \quad t = 1, \dots, T$$

Std.-martingal nr. 1 (Example 23) Lad X være en (vilkaarlig) stokastisk variabel. Den stokastiske process (Y_t) , defineret ved $Y_t = E[X | \mathcal{F}_t]$ for $t = 0, \dots, T$ er en martingal.

Std.-martingal nr. 2 (Example 23) En (løbende) sum af uafhængige stokastiske variable med middelværdi 0 (“fair spil”) er en martingal (mht. sit naturlige filter).

En observation (Example 23) Vi kunne (pr. tårnegenskaben) alternativt have brugt definitionen $E[X_u|\mathcal{F}_t] = X_t$ for alle $t \leq u$. Og det bliver man nødt til i kontinuert tid.

En underlig proces (Example 24) Vi finder en positiv process for hvilken $M_t = E[M_{t+1}|\mathcal{F}_t]$ for alle t , specielt $E[M_t] = 1$ for alle t , men for hvilken $M(t) \rightarrow 0$ næsten sikkert for $t \rightarrow \infty$.

En opgave om filtre

EN OLMKØBETJENESTES OPGAVER OM FILTERE, BORTKØBES
MIDDELVÆRDIER OG MARTINGALER

I AFSNIT 4.1 / SIDEN 109 / UGE 5 - MATHIS
KAN VI SPECIFISKE EN MODEL FOR DEN
STOKASTISKE PROCES $X = \{X(t)\}_{t=0,1,2}$ SÅDAN:

(Lille ørn = Gitter
og resten HAR EN
ORIENTERET "RØR" I
TID, MEN IKKE I
RUM, M.D. OP OG NED
ANVILDE GEMMELESE VÆKST)

Opgaver

- SKRIV MED BLENDE DET TILSVARENDE OP I
AFSNIT 4.2'S ABSTRAKTE $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ -
NOTATION/FORMALISME.
- BEREKN - OMHJÆLVENHED EFTER DEFINITIONEN -
 $E_t(X(2))(\omega)$ FOR ALLE t OG ω .
- ER X EN MARTINGAL?
- BEREKN $E_t(X(1))(\omega)$ FOR $t=0,1$ OG ALLE ω .
- HVAD ER $E_0(X(1))(\omega)$? KAN DU SE REPRÆSENTATIONEN
I GITTERET?
- BEREKN $E_0(X(2))$ OG $E_0(E_1(X_2))$. KOMMONICER

Opgaver

- SKRIV MATHEMATISKE DETALJER OP I AFSNIT 4.2'S ABSTRAKTE $(\mathcal{R}, \mathcal{I}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ -NOTATION/FORMALISME.
- BEREKN - OMHYKSELST BETUR DEFINITIONEN - $E_t(X(2))(w)$ FOR ALLE t OG w .
- ER X EN MARTINGAL?
- BEREKN $E_t(X(1))(w)$ FOR $t=0,1$ OG ALLE w .
- HUND ER $E_2(X(1))(w)$? KAN DU GIVE REPRESENTATION I GITTERET?
- BEREKN $E_0(X(2))$ OG $E_0(E_1(X_2))$. KOMPLETTER

Her er et svar: [Link](#)