Standardbinomialmodellen — og lidt om Black-Scholes + implicit volatilitet

Matematisk Finansiering 1
Efterår 2022

6. oktober

Afsnit 5.5: Standardbinomialmodellen

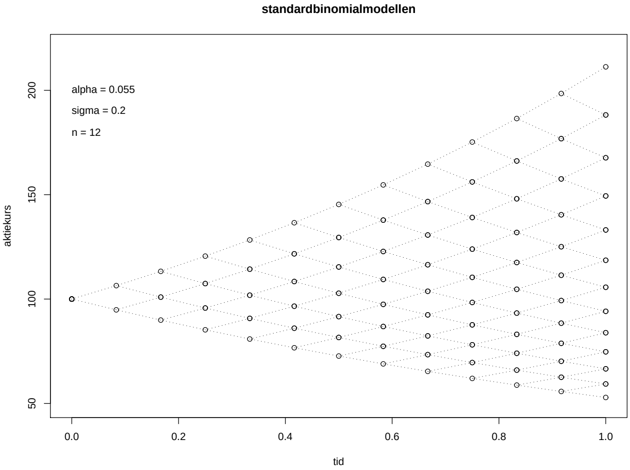
Aktiekursen går multiplikativt op og ned iht.

$$
\begin{aligned}
u &= \exp(\alpha \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t}) \\
d &= \exp(\alpha \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t}),
\end{aligned}
$$

hvor α og σ er kendte konstanter. Lad os sige op/ned $p-$ssh begge er 1/2.

Dukker op i eksamensopgaver på lidt forskellige måder – se fx opgave 1,MatFin1, oktober 2019.

I afsnit 2.7.1-10 i Röman, I har en hoben forskellige binomialmodelspecifikationer – men faktisk ikke lige denne. (Cox-Ross-Rubinstein og Jarrow-Rudd er specialtilfælde.)


standardbinomialmodellen
alpha = 0.055
sigma = 0.2
n = 12
aktiekurs
50
100
150
200
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
tid

Ved at Taylor-udvilke exp-fkt får vi

$$\mathrm{E}_t^P\left(\frac{S_{t+\Delta t}-S_t}{S_t}\right)=\mu\Delta t+\mathrm{o}(\Delta t),$$

hvor $\mu=\alpha+\sigma^2/2$ og størrelsesordensnotationen "$\mathrm{o}(\Delta t)$" betyder at restleddet går hurtigere imod 0 end Δt.

Taylor-udvikler man noget mere:

$$\mathrm{var}_t^P\left(\frac{S_{t+\Delta t}-S_t}{S_t}\right)=\sigma^2\Delta t+\mathrm{o}(\Delta t),$$

Hvorfor restled og ikke eksakt? For bedre at kunne se strukturen.

Vi kan bruge det til at estimere μ, α og specielt σ.

Den sædvanlige $q = (R - d)/(u - d)$ lløber ingen steder.

Vi har (uden eksplicit at bruge formen af q)

$$\mathrm{E}_t^Q \left(\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} \right) = r\Delta t + \mathrm{o}(\Delta t),$$

mens var_t^Q ikke ændres. (Her skal der "tayloreres" og bruges formen af q til køerne kommer hjem.) Det sidste kan ses som en illustration af noget, der kaldes Girsanovs sætning.

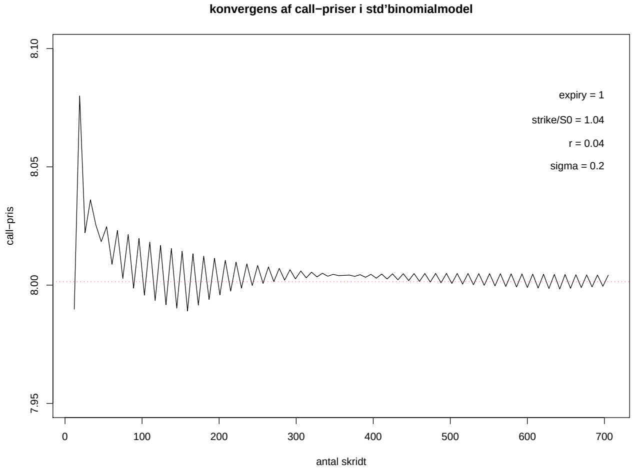
Derfor: $n \to \infty$-grænseværdier for optionspriser eksisterer og afhænger ikke af α — som derfor ofte udlades. (Og $p = 1/2$ heller ikke nødvendigt.)

Hjertet i prisfastsættelsesalgoritmen ser sådan ud:

```
call[,n+1]<-pmax(S0*u^(0:n)*d*^(n:0)-strike,0)

for (i in n:1) {
  for (j in 1:i){
    call[j,i]<-(q*call[j+1,i+1]+(1-q)*call[j,i+1])/R
  }
}
```

(Pas på: Matricer og koodinatsystemer bytter om på 1.- og 2.-akser.)


konvergens af call−priser i std'binomialmodel
expiry = 1
strike/S0 = 1.04
r = 0.04
sigma = 0.2
call−pris
8.10
8.05
8.00
7.95
0
100
200
300
400
500
600
700
antal skridt

Estimation

Nyttigt trick: Skift til log-afkast(rater):

$$a_{t,t+h} = \ln(S(t+h)/S(t)),$$

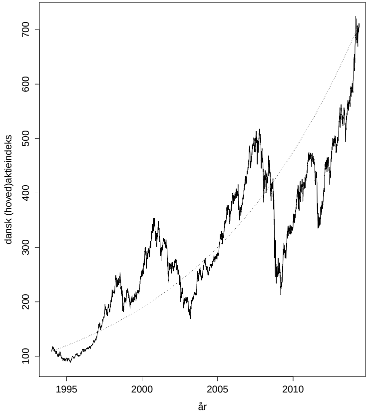
hvor h kaldes afkasthorisonten.

Fordel: Log-afkast er additive i tid, dvs.

$$a_{t,t+n*\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} a_{t+(i-1)*\Delta t, t+i*\Delta t}.$$

Det er simple afkast ikke. De er det til genæld på tværs af aktiver. (Men hvis horsionten er kort, så er der ikke stor forskel.)

Data: Daglige observationer af KFX/C20-indeks(afkast) 1994-2014.(Dividendejustering glemmer vi alt om.)



Estimater:

Horizon (h)	average of a_h's	$\hat{\alpha}$	std. dev. of a_h's	$\hat{\sigma}$
1 day	0.000399	0.101 [0.042]	0.0123	0.195 [0.0019]
5 days ($\sim$ 1 week)	0.00181	0.101 [0.043]	0.0280	0.198 [0.0042]
21 days ($\sim$ 1 month)	0.00734	0.100 [0.043]	0.0578	0.202 [0.0089]

Table 5.1: Estimation of parameters of the standard binomial model on Danish data 1994-2014. Numbers in square brackets are standard errors.

Opgave: Genskab disse tal selv og opdater til 2020-data.

Variationen i momenter af rå afkast: Man skal huske tidsskalering. Binomialmodellen lægger en ganske speciel sådan på, men der vil altid være en. (*Sarkastisk bemærkning til økonometrikere.*)

Variationen i $\hat{\alpha}$'erne : "Heltalsdivisionseffekt". (Og ja, med log-afkast er det α, der estimeres.) Disse estimater er generelt ustabile.

Variation i $\hat{\sigma}$'erne kan opstå pga. manglende uafhængighed af afkast. (+ lidt "heltal"). Men vi har ihvertfald fat i et eller andet rigtigt mht. tidsskaleringen. Disse estimater er generelt stabile.

Tillægsspørgsmål: Sker der noget i weekenden?

dag-til-dag	$\hat{\sigma}$
mandag $\rightarrow$ tirsdag	0.189
tirsdag $\rightarrow$ onsdag	0.200
onsdag $\rightarrow$ torsdag	0.192
torsdag $\rightarrow$ fredag	0.178
fredag $\rightarrow$mandag	0.214

Ikk' meget! Standardafvigelserne er ihvertfald ikke en faktor $\sqrt{3}$ større. Ergo for finansmodelleringsformål er der ca. 250 dage i et år. (Men pas på i rentemarkeder, hvor der ofte bruges noget, der ligner faktiske, fysiske dage i kontraktspecifikationen. Du betaler også rente på dit lån i weekenden.)

Afsnit 7.1-3: Black-Scholes' model og formel

I grænsen for std'binom'modellen sidder der en kontinuert model, hvor aktiekursen er lognormalfordelt, en geometrisk brownsk bevægelse.

Arbitragefrie call-optionspriser er givet ved Black-Scholes' formel

$$\begin{aligned}
\mathrm{call}(t) &= S(t)\Phi\left(\frac{\ln\frac{S(t)}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
&\quad - e^{-r(T-t)}K\Phi\left(\frac{\ln\frac{S(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right),
\end{aligned}$$

hvor Φ er std'-normalfordelingsfkt'.

Man kan opskrive call-optionsprisen i std'binomialmodellen, så den ligner Black-Scholes' formel, fx Röman, I, 2.7.17.

Man bevise konvergensen stringent med (en tilpas kraftig version af) den centrale grænseværdisætning.

I skal have hørt om Black-Scholes, men der kommer ikke "regnetekniske" eksamensopgaver i det i MatFin1. Emnet behandles i stor grad MatFin2.

Afsnit 7.4- Implicit volatilitet

Vi kan se Black-Scholes' call-pris-formel som en funktion af volatiliteten σ; $\text{call}^{BS}(\sigma; \ldots)$.

For en bestemt observeret call-pris, call^{obs}, kan vi definere og beregne dens implicitte volatilitet, σ^{imp} som løsningen til ligningen

$$\text{call}^{BS}(\sigma^{imp}; \ldots) = \text{call}^{obs}.$$

Overvejelser viser, at entydighed (monotonicitet) og eksistens (Mertons tunnel) er iorden. Og at call- og put-optionspriser er voksende i volatilitet.

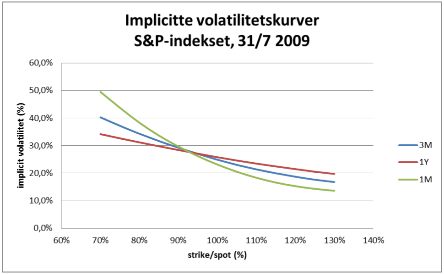
Ofte angiver (*kvoterer*) markedsdeltagere implicit volatiltet i stedet for priser.

Det betyder ikke, at de tror på/antager B-S-modellen holder. Snarere tværtimod: Hvis den gjorde, så ville alle implicitte volatiliteter være ens.

Ens imp' vol' observeres ikke i data. Man ser derimod et *smile* eller et *skew* over strike-priser.

Med rigtige data

I aktie- og rentemarkeder ser man typisk (som nedenfor) *skew*, dvs. at implicitte volatiliteter er aftagende i strike. Et *smile*, er hvor kurven af implicitte volatilteteter har minimum omkring $K \approx S(t)$, *at-the-money*; dette ses ofe i valutamarkeder.



Om *skew* og *smile*

Smile: Tungere-end-normalfordeling-haler for afkastrater.

Skew: Negativ korrelation mellem underliggende og volatilitet; venstreskæv afkastratefordeling.

Udbud/efterspørgsel eller psykologi: *Fear and greed*; put-optioner som forsikring, call-optioner til spekulation.

Modelteknisk, I: Spring $\rightsquigarrow$ smile – og har specielt effekt for korte løbetider.

Modelteknisk, II: Stokastisk volatilitet $\rightsquigarrow$ mere masse i halerne. Med negativ korrelation mellem aktieafkast og volatiltet (når markedet falder, bli'r alle mere nervøse) $\rightsquigarrow$ skew. (Men det kan man faktisk også med en simpel normalfordelt model for aktien.)

Fra Fin1-eksamen juni 2014

Spg. 3b

Du er begyndt i en kvantitativ analyse-stilling (som *quant*) i en bank. En af bankens *tradere* (en, der faktisk handler med optioner) kommer og siger til dig:

> Når jeg handler put-optioner, så er det typisk til en højere volatilitet, end når jeg handler call-optioner. Kan du lave en model for det?

Giver det mening, hvad traderen siger? **Hvad** svarer du traderen? (Dit svar forventes forståeligvis begrundet.)

19	
20	3b
21	Når traderen sig "handler til volatilitet" mener han "den implicitte volatilitet, handelsprisen svarer til".
22	Out-of-the-money optioner er de mest likvide, og/så der ligger i traderens udsagn nok implicit
23	en strike-afhængighed.
24	(Så det er ikke decideret vrøvl, hvad traderen siger; det er det sjældent for den slags folk.)
25	Det, der beskrives er et "skew" i implicitte volatiliteter (imp' vol' aftagende i strike) ;
26	det har vi set er "empirisk plausibelt".
27	Man kan eks'vis forklare det med en model hvor aktie-volalilitet og aktie-afkast er negativt korrelerede.
28	