

Matematik A E2019

Uge 36, Forelæsning 1

Kort intro til kurset

+

Kapitel 1: Mængdelære, logik, beviser og
induktion

Matematik på polit – Hvorfor?

- Økonomi som disciplin er stærkt matematiseret
 - Matematik er nødvendigt for at kunne læse økonomisk faglitteratur
 - Modeller indenfor mikro- og makroøkonomi
 - Empiriske metoder (økonometri)
- Matematik A og B: Den nødvendige (minimale) baggrund
- Matematik har mange positive “bivirkninger”
 - Styrker evne til at ræsonnere præcist og kortfattet
 - Styrker evne til abstrakt tænkning
 - Styrker kreativitet (ja, sgu!) inden for faste rammer

Kursusinformation

- Vi løber kort dokumentet med kursusinformation fra Absalon igennem. Læs det grundigt! Og se også info på *kurser.ku.dk*.

Matematik A E2019: Vigtig information om kurset

Se også *kurser.ku.dk*, direkte link: <https://kurser.ku.dk/course/a%3c3%98kb08006u/2019-2020>

Undervisningen

Undervisningen i Matematik A består af:

- 4 timers forelæsninger i 14 uger fra uge 36 til 50 (minus uge 42). Forelæsningerne afholdes mandage og torsdage kl. 10-12 i Christian Hansen auditoriet, CSS 34-0-01. Forelæser er Thomas Jensen (tj@econ.ku.dk).
- 3 timers holdundervisning i 15 uger fra uge 36 til 51 (minus uge 42). Underviser og skema for de enkelte hold kan findes på *kurser.ku.dk* (brug link ovenfor, se højre kolonne).

Planer for de enkelte forelæsninger og holdundervisningsgange er tilgængelige på Absalon.

VIGTIGT: Undervisningen forudsætter, at I har forberedt jer og deltager aktivt! Der er specifikke minimumsforventninger til jeres forberedelse – læs dem under beskrivelsen af forelæsninger og holdundervisning nedenfor.

Undervisningsmateriale

Lærebogen i kurset er:

- Sydsæter, Hammond, Strøm og Carvajal: "Essential Mathematics for Economic Analysis". Fifth edition. Pearson, 2016.

Vi gennemgår kapitlerne 1-14, dog med enkelte mindre undtagelser (se forelæsningsplanen).

Der findes løsninger til alle opgaver bagerst i bogen. Til opgaver markeret med "SM" er der uddybende løsninger i den tilhørende Student's Manual, som er tilgængelig på Absalon.

Eventuelt supplerende materiale vil blive lagt på Absalon.

Om papir, blyant og IT-værktøjer

Som udgangspunkt er vores eneste værktøjer i dette kursus papir og blyant. Det betyder, at alle opgaver bør laves uden brug af lommeregner, CAS-værktøjer og lignende (som heller ikke er tilladt til eksamen, der er uden hjælpemidler). Formålet med dette er at styrke grundlæggende færdigheder og forståelse inden for dele af matematikken, der er helt centrale på økonomi-studiet.

I nogle tilfælde kan begrænset brug af IT-værktøjer være relevant til at støtte jeres arbejde med opgaver. Fx kan det være nyttigt at tegne en graf (især for funktioner af to variable) eller checke løsningen af en ligning. GeoGebra (<https://www.geogebra.org/>) er et gratis og let tilgængeligt værktøj til sådanne ting, men der er

- Og lad os så bare komme i gang...

Mængder (1.1)

- Mængde: "Samling af elementer"

$$H = \{ \text{pasta, fisk, b\o{o}f} \}$$

$$S = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

- Ofte opskrives mængder ved at specificere:

- Typen af elementer (fx $n \in \mathbb{N}$)
- De egenskaber elementerne skal opfylde (fx $n \geq 10$)

{type : egenskaber}

- Naturlige tal større end eller lig 10:

$$\begin{aligned} & \{ n \in \mathbb{N} : n \geq 10 \} \\ & = \{ 10, 11, 12, 13, \dots \} \end{aligned}$$

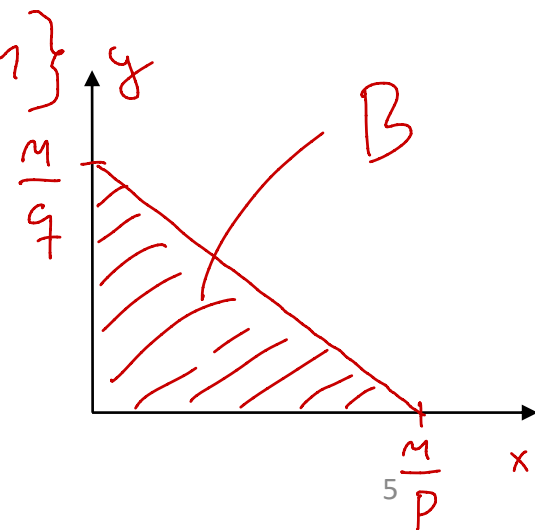
- Det åbne interval fra 0 til 1:

$$]0, 1[= (0, 1) = \{ x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1 \}$$

Budgetmængder

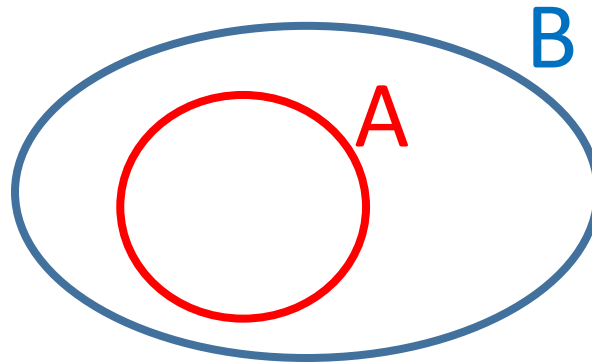
- Forbrugssituation med 2 varer
 - Varebunt (consumption bundle): (x, y) , hvor $x, y \geq 0$
 - Priser: $p > 0$ og $q > 0$
 - Indkomst/formue: $m > 0$
- Budgetmængde: Mængden af varebunder, som forbrugeren har mulighed for at købe

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, px + qy \leq m \right\}$$



Delmængde

- $A \subseteq B$ (A er en delmængde af B) betyder:
Hvis $a \in A$, så gælder også $a \in B$
- Venn diagram:



- Bemærk:
 - Enhver mængde er en delmængde af sig selv: $A \subseteq A$
 - Den tomme mængde er delmængde af enhver mængde: $\emptyset \subseteq A$
 - $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ og $B \subseteq A$

Mængdeoperationer

- Foreningsmængde:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ eller } x \in B\}$$

- Fællesmængde:

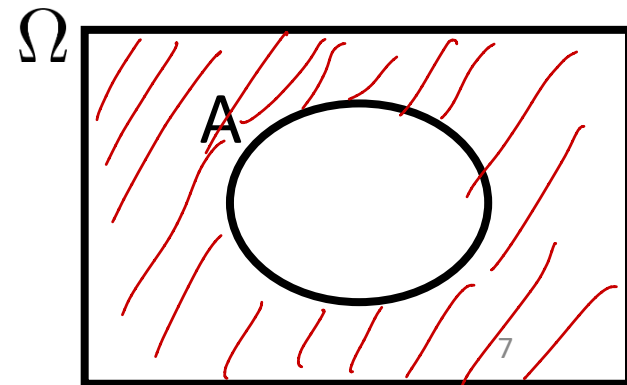
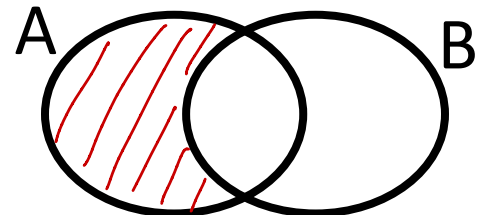
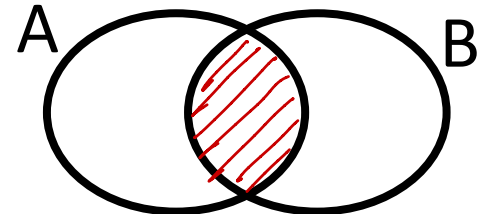
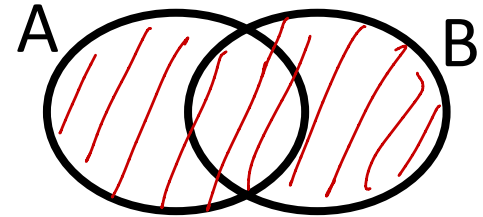
$$A \cap B$$

- Mængdedifferens:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ og } x \notin B\}$$

- Komplementærmængde (universal mængde Ω):

$$A^c = \complement A = \Omega \setminus A$$



PINGO: Budgetmængde

- pingo.coactum.de, access number 708646

- Forbrugssituation med 2 varer

- Priser og indkomst: $p = 3$, $q = 5$ og $m = 28$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, px + qy \leq m\}$$

- Afgør for hvert af følgende varebundter, om de ligger i budgetmængden:

1. $(x, y) = (9, 0)$

$$px + qy = 3 \cdot 9 = 27 \leq 28$$



2. $(x, y) = (3, 4)$

$$= 29 > 28$$



3. $(x, y) = (6, 2)$

$$= 28$$



$\pi=3$?!

$$x = \frac{\pi+3}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = \pi + 3$$

$$\Rightarrow 2x(\pi-3) = (\pi+3)(\pi-3)$$

$$\Rightarrow 2\pi x - 6x = \pi^2 - 9$$

$$\Rightarrow 9 - 6x = \pi^2 - 2\pi x$$

$$\Rightarrow 9 - 6x + x^2 = \pi^2 - 2\pi x + x^2$$

$$\Rightarrow (3-x)^2 = (\pi-x)^2$$

$$\Rightarrow 3-x = \pi-x$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{3 = \pi}}$$

En smule om logik (1.2)

- Formel logik er basis for al matematisk ræsonnement
 - Vi er ikke altid eksplicite omkring vores brug af logik i beviser mv, men logikkens regler ligger altid i baggrunden

- **Udsagn (proposition):** En formulering i ord og/eller symboler, som enten er sand eller falsk

$$\pi = 3 \text{ (falsk)} \quad 2^2 = 4 \text{ (sandt)}$$

- **Åbent udsagn:** Udsagn med en eller flere variable, så sandhedsværdien afhænger af variabelens værdi

$$x^2 = 1 \quad px + 7y \leq M$$

Implikationer

Lad P og Q være udsagn

- Implikationen $P \Rightarrow Q$ betyder:

Hvis P er sand, så er Q også sand

$$x=1 \Rightarrow x^2=1 \quad \checkmark$$

Det regner \Rightarrow vejen er usd \checkmark

~~$x^2=y^2 \Rightarrow x=y \quad \%$~~

- Bi-implikationen (equivalence arrow) $P \Leftrightarrow Q$ betyder:

Der gælder både $P \Rightarrow Q$ og $Q \Rightarrow P$

$$x=1 \text{ eller } x=-1 \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2=1 \quad \checkmark$$

Nødv. og tilstr. betingelser

Lad P og Q være udsagn

- At P er en **tilstr. betingelse** for Q betyder:

Der gælder $P \Rightarrow Q$

At bo i Kbh. er tilstr bet. for at bo i DK.

- At P er en **nødv. betingelse** for Q betyder:

Der gælder $Q \Rightarrow P$

[eller den ækviv. implikation $\text{ikke-}P \Rightarrow \text{ikke-}Q$]

At bo i DK er nødv. bet. for at bo i Kbh.

PINGO: $\pi=3$?!

- Hvilken implikation gælder ikke (er falsk)?

$$x = (\pi + 3)/2$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow 2x = \pi + 3$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow 2x(\pi - 3) = (\pi + 3)(\pi - 3)$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow 2\pi x - 6x = \pi^2 - 9$$

$$\textcircled{4} \Rightarrow 9 - 6x = \pi^2 - 2\pi x$$

$$\textcircled{5} \Rightarrow 9 - 6x + x^2 = \pi^2 - 2\pi x + x^2$$

$$\textcircled{6} \Rightarrow (3 - x)^2 = (\pi - x)^2$$

$$\textcircled{7} \Rightarrow 3 - x = \pi - x \text{ eller } 3 - x = -(\pi - x)$$

$$\textcircled{8} \Rightarrow \pi = 3 \text{ eller } x = \frac{\pi + 3}{2} \quad 13$$

Beviser (1.3)

- En matematisk sætning (theorem) består af en eller flere implikationer

$$P \Rightarrow Q$$

- Eksempler:

Lad f være en differentiabel funktion på et åbent interval I . Hvis $c \in I$ er et maksimumspkt eller et minimumspkt for f , så er $f'(c) = 0$.

Lad n være et naturligt tal. Da gælder:

$$n \text{ er lige} \Leftrightarrow n^2 \text{ er lige}$$

Bevis-typer

En sætning $P \Rightarrow Q$ kan bevises på forskellige måder

- **Direkte:** Antag P er sand. Vis, at så må Q være sand.
- **Bevis ved “kontraponering”/”kontraposition”:**
Vis, at implikationen $\text{ikke-}Q \Rightarrow \text{ikke-}P$ gælder.
Denne implikation er ækvivalent med $P \Rightarrow Q$
- **“Modstridsbevis”:** Antag P er sand, men at Q ikke er sand. Vis, at dette fører til en modstrid.

Heraf følger det ønskede:

Hvis P er sand, må også Q være sand

Et lille bevis...

Lad n være et naturligt tal. Da gælder:

$$n \text{ er lige} \Leftrightarrow n^2 \text{ er lige}$$

Induktionsbeviser (1.4)

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

Hmmm...man kunne fristes til at tro at...

En del matematiske resultater har “formen”:

Et udsagn/formel $A(n)$ gælder for alle $n = 1, 2, 3, \dots$

Sådanne resultater kan ofte bevises ved **induktion**:

- **Induktionsstart:** Vis, at $A(1)$ er sand.
- **Induktionsskridt:** Lad k være vilkårligt naturligt tal.
Vis, at hvis $A(k)$ er sand, så er også $A(k + 1)$ sand.

Kan vi komme igennem både induktionsstart og induktionsskridt, så har vi vist det ønskede!

“Induktionsprincippet”: Dyb matematik, men intuitionen er ganske simpel

\square \square \square \square \square \dots
 $A(1)$ $A(2)$ $A(3)$ $A(4)$ $A(5)$

Induktionsbevis: Eksempel

For ethvert naturligt tal n gælder:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Bevis ved induktion:

