Matematik A E2019
Uge 36, Forelæsning 2

Afsnit 2.1-2.5, 2.8-2.9

Algebra:

Talmængder, potenser, rødder, brøker, summer

Talmængder (2.1)

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

$\mathbb{N} \cup \{0\}$

$= \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

De hele tal

$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Reelle tal

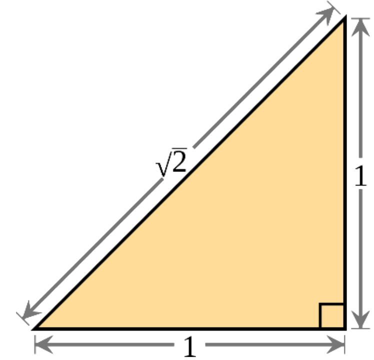
"Alle tal på tallinjen"

Rationale tal

Alle brøker $\frac{p}{q}$

$(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N})$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$



Modstridsbevis: Antag $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Da kan $\sqrt{2}$ skrives som <u>uforkortelig</u> brøk:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

$\Rightarrow 2q^2 = p^2$, altså p^2 er lige

Derfor er p lige, dvs $p = 2k$

$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$

$\Rightarrow q^2 = 2k^2$, altså er q^2 lige

Derfor er q lige.

MODSTRID! ($\frac{p}{q}$ antaget uforkortelig, men kan forkortes med 2) $\square$

Potenser og rødder (2.2+5)

For $a \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ gange}}}$$

Følgende regneregler verificeres let:

$$\boxed{\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} \\ (a^r)^s &= a^{r \cdot s} \\ (a \cdot b)^r &= a^r \cdot b^r \end{aligned}}$$

De skal sidde på rygraden!

Heltallige eksponenter

Udvidelse til heltallige eksponenter ($a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$):

$$\boxed{\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \end{aligned}}$$

$a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0 \longrightarrow a^0 = 1$

Giver ekstra regneregler:

$$\boxed{\frac{a^r}{b^s} = a^r b^{-s} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = a^r b^{-r}}$$

Rationale eksponenter

Udvidelse til rationale eksponenter ($a > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$):

$$\boxed{a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} \qquad a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p \qquad a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{(\sqrt[q]{a})^p}}$$

$$a = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = \underbrace{a^{\frac{1}{q}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{1}{q}}}_{q \text{ gange}}$$

Vigtige regneregler for kvadratrødder:

$$\sqrt{ab} = (ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\cancel{\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Reelle eksponenter

Kan vi give mening til fx $a^{\sqrt{2}}$ eller a^{π}?

JA! Fx som grænseværdi.

HUSK: Potensregnereglerne gælder altid!

$$a^r a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{rs}$$

$$\frac{a^r}{b^s} = a^r b^{-s} \quad (ab)^r = a^r b^r \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = a^r b^{-r}$$

Øvelser (u. CAS, lommeregner mv)

1) Udregn tallet $\left((1+2)^3 \cdot 27^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(3^3 \cdot \sqrt[3]{27}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(3^3 \cdot 3\right)^{\frac{1}{2}} = \left(3^4\right)^{\frac{1}{2}} = 3^2 = 9$

2) Reducér udtrykket $\left((3x)^{\frac{1}{2}} \cdot (xy^{-1})^3\right)^4$

pingo.coactum.de (708646)

$= \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^3 \cdot y^{-3}\right)^4 = \left(3^{\frac{1}{2}} x^{\frac{7}{2}} \cdot y^{-3}\right)^4$

$= 3^2 \cdot x^{14} \cdot y^{-12} = \frac{9x^{14}}{y^{12}}$

Brøker (2.4)

Husk brøkregnereglerne!

$$\frac{a\cdot c}{b\cdot c} = \frac{a}{b} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Eksempler: [Noter tilføjet efter forelæsninger]

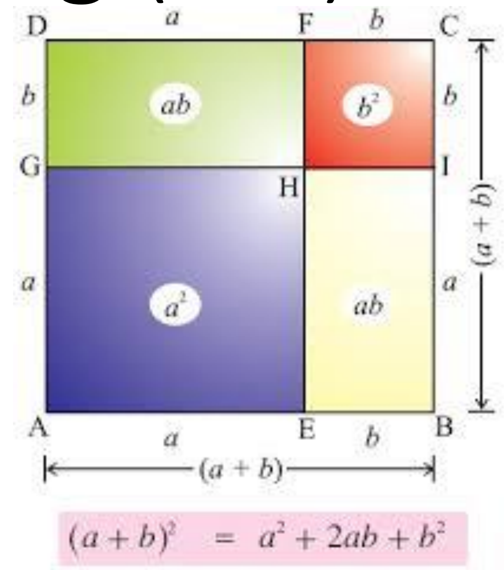
$$\frac{16x^4(x+y^2)z^2}{6x^5yz} = \frac{8(x+y^2)z}{3xy}$$

(forkortet med 2, x^4 og z)

$$\frac{z}{x^2y} + \frac{3y}{zx} = \frac{z^2}{x^2yz} + \frac{3xy^2}{x^2yz} = \frac{z^2+3xy^2}{x^2yz}$$

forlænget med z forlænget med xy

Kvadratsætn. og faktorisering (2.3)



- **Kvadratsætningerne:**

$$\boxed{\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}}$$

Bevis: Gang ud!

[Husk “den distributive lov”: $a(b+c) = ab + ac$]

- **Faktorisering:** Skriv udtryk som produkt

$$4x^2 - y^4 = (2x)^2 - (y^2)^2 = (2x+y^2)(2x-y^2)$$

Eksempel/Øvelse

[Noter tilføjet efter forelæsningen]

Faktorisér flg udtryk:

$$9K^3L - 6K^2L^2 + KL^3$$

$$= KL(9K^2 - 6KL + L^2)$$

$$= KL((3K)^2 - 2(3KL) + L^2)$$

$$= KL(3K - L)^2$$

Summer (2.8-9)

- Danmarks kommuner nummereret fra 1 til 98
- N_i : Indbyggertallet i kommune nummer i
- Indbyggertallet i hele DK:

$$N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_{97} + N_{98}$$

- Med sum-notation:

$$\sum_{i=1}^{98} N_i \qquad (i\text{: "dummy variabel"})$$

- Antag kommunerne i Region Sjælland (17) har numrene fra 30 til 46. Indbyggertallet i Region Sjælland kan så skrives:

$$N_{30} + N_{31} + \ldots + N_{46} = \sum_{i=30}^{46} N_i$$

Regneregler for summer

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Eksempel: Sum af ulige tal

Tidligere har vi (ved induktion) vist:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2 \qquad \text{for alle } n \in \mathbb{N}$$

Brug sum-notation og regneregler: