# Matematik A E2019
# Uge 38, Forelæsning 1

Afsnit 4.6-4.10

Polynomier, potensfunktioner, eksponentialfunktioner, logaritmefunktioner

# Polynomier (4.7)

- Et polynomium af grad $n \geq 0$ er en funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ af formen

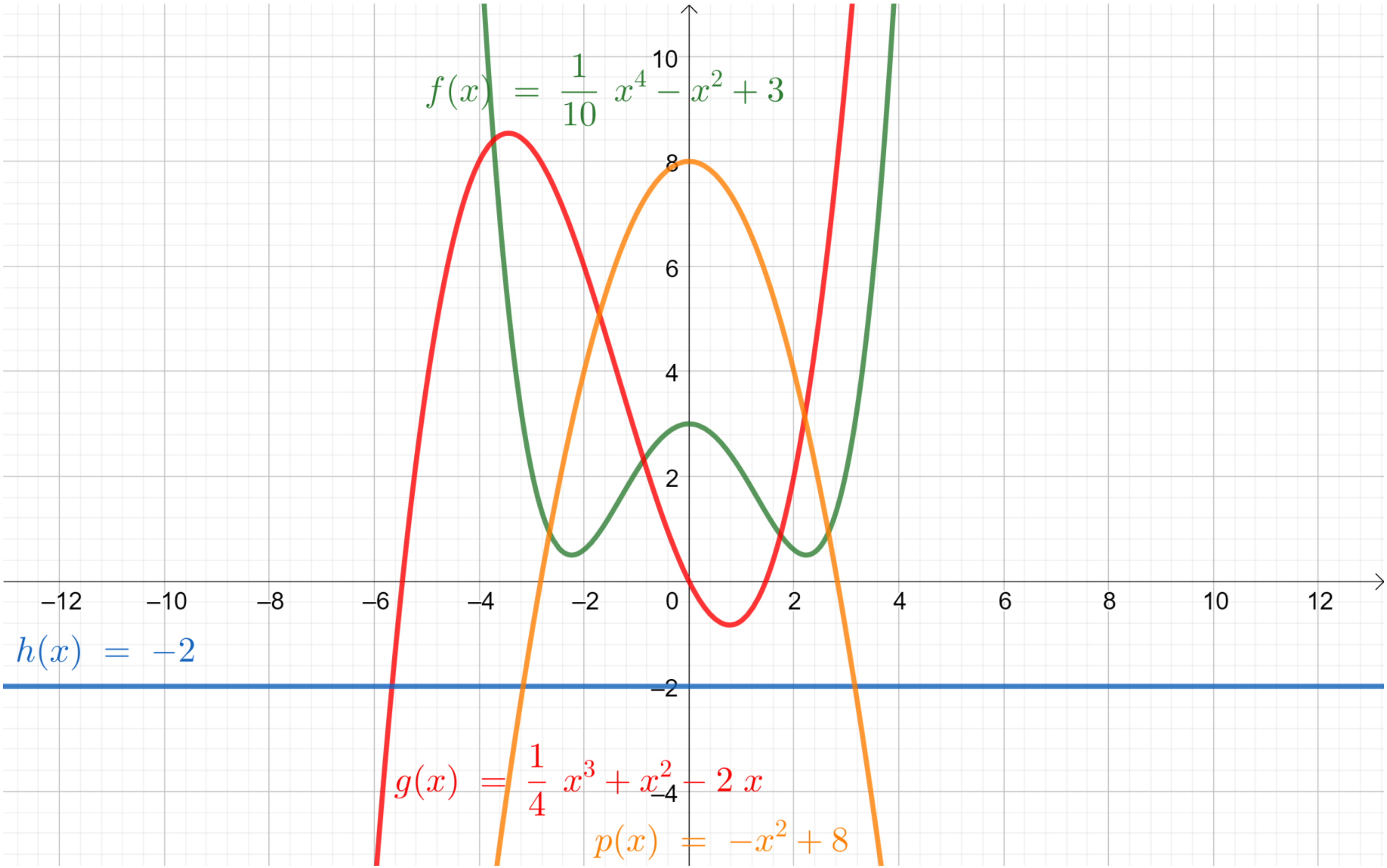
$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{aligned}$$

hvor $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ og $a_n \neq 0$.

- Nulpolynomiet: $N(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

- Rødder: $a \in \mathbb{R}$ er rod i $P$ hvis $P(a) = 0$

# Eksempler



$f(x) = \frac{1}{10} x^4 - x^2 + 3$
$g(x) = \frac{1}{4} x^3 + x^2 - 2x$
$h(x) = -2$
$p(x) = -x^2 + 8$
–12
–10
–8
–6
–4
–2
0
2
4
6
8
10
12
10
8
6
4
2
–2
–4

# Faktorisering af polynomier

**Sætning** (nederst s. 117):

Lad $P$ og $Q$ være polynomier, så graden af $P$ er større end eller lig graden af $Q$.
Da findes entydige polynomier $q$ og $r$ så

$$P(x) = q(x)Q(x) + r(x) \qquad \text{for alle } x$$

og graden af $r$ er mindre end graden af $Q$

Hvis restpolynomiet $r$ er nulpolynomiet ($r(x) = 0$ for alle $x$), siger vi at "$Q$ går op i $P$" eller at "$Q$ er en faktor i $P$"

Hvis $Q(x) = x - a$:

$$P(x) = q(x)(x-a) + r \qquad \text{for alle } x$$

**Sætning (4.7.5, s. 118):**

$a$ er rod i polynomiet $P$ (dvs $P(a) = 0$)

$$\Leftrightarrow$$

Polynomiet $Q(x) = x - a$ går op i $P$ (dvs $P(x) = q(x)(x-a)$)

Bevis: $\Leftarrow$ Antag $Q(x) = x-a$ går op i $P$

Dvs $P(x) = q(x)(x-a)$

$P(a) = q(a)(a-a) = 0$. Altså er $a$ rod i $P$.

$\Rightarrow$ Antag $a$ er rod i $P$, dvs. $P(a) = 0$

$P(x) = q(x)(x-a) + r$

$P(a) = q(a)(a-a) + r = r = 0$

Dvs $r = 0$, altså $P(x) = q(x)(x-a)$. Færdig!

$$P(x) = q(x)Q(x) + r(x)$$

# Polynomiers division

Givet $P$ og $Q$ findes metode til at finde $q$ og $r$

Lad os prøve med: $P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 2$ og $Q(x) = x^2 + 2$

$$2x^4 + 4x^3 - 2 : x^2 + 2 = \underbrace{2x^2 + 4x - 4}_{q(x)}$$

$$-(2x^4 + 4x^2)$$

$$4x^3 - 4x^2 - 2$$

$$-(4x^3 + 8x)$$

$$-4x^2 - 8x - 2$$

$$-(-4x^2 - 8)$$

$$-8x + 6 \quad r(x)$$

Konklusion:

$$2x^4 + 4x^3 - 2 = (2x^2 + 4x - 4)(x^2 + 2) - 8x + 6$$

# Eks. på anvendelse af pol. div.

$\boxed{\text{Find alle rødderne i } P(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 2}$

"Gæt en rod": $P(1) = 0$ [Se evt Sætning 4.7.6]

Polynomiers division:

$$x^3 + 5x^2 - 4x - 2 = (x^2 + 6x + 2)(x - 1)$$

Rødder i $q(x) = x^2 + 6x + 2$: $\quad x = -3 \pm \sqrt{7}$

Altså har vi alle rødder i $P$:

$$x = -3 - \sqrt{7}, \quad x = -3 + \sqrt{7} \quad \text{og} \quad x = 1$$

# Antal rødder i n'te-grads polynomium

**Sætning (s. 118 midt):**

Et polynomium af grad $n$ har højst $n$ forskellige rødder

MODSTRIDSBEVIS: Lad $P$ være pol. af grad $n$

Antag mindst $n+1$ forsk. rødder: $r_1, r_2, \dots, r_n, r_{n+1}$

$P(x) = q(x)(x-r_1)\cdot(x-r_2)\cdot\ldots\cdot(x-r_n)(x-r_{n+1})$

$\rightarrow$ Graden af $P$ er $\geq n+1$. MODSTRID!

Altså højst $n$ forsk. rødder $\square$

# Rationale funktioner

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad (\text{hvor } Q(x) \neq 0)$$

Polynomier

Hvis graden af P er mindre end graden af Q kaldes den rationale funktion *ægte (proper)*, ellers kaldes den *uægte (improper)*.

En uægte rational funktion kan omskrives til sum af et polynomium og en ægte rational funktion vha polynomiers division.

Eks:

P(x)

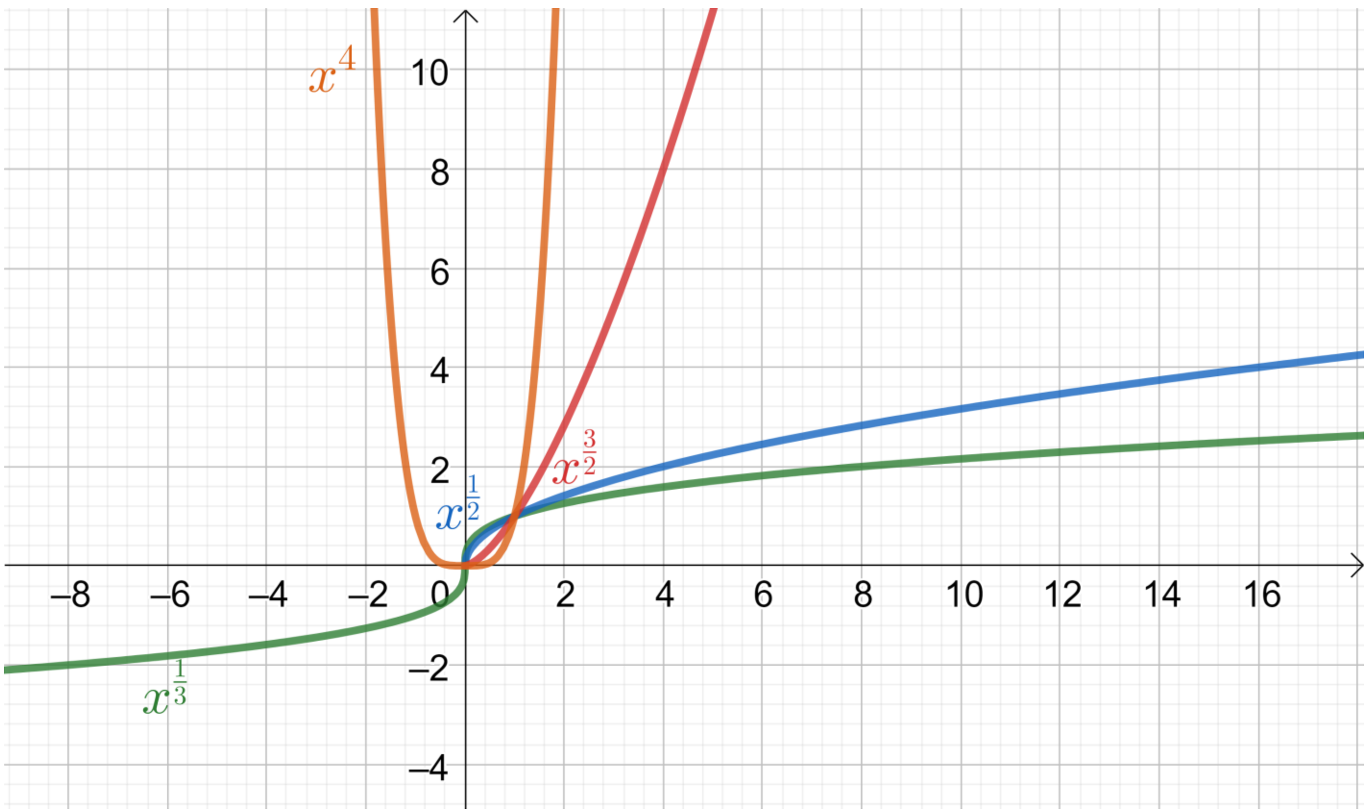
$$\frac{x^2-x-1}{x+1} = x - 2 + \frac{1}{x+1}$$

Q(x) q(x) r(x)

# Potensfunktioner (4.8)

$$f(x) = Ax^r,$$

hvor $A, r \in \mathbb{R}$ er konstanter og $x > 0$



# Eksponentialfunktioner (4.9)

$$f(x) = Aa^x,$$

hvor $A$ og $a > 0$ er konstanter og $x \in \mathbb{R}$

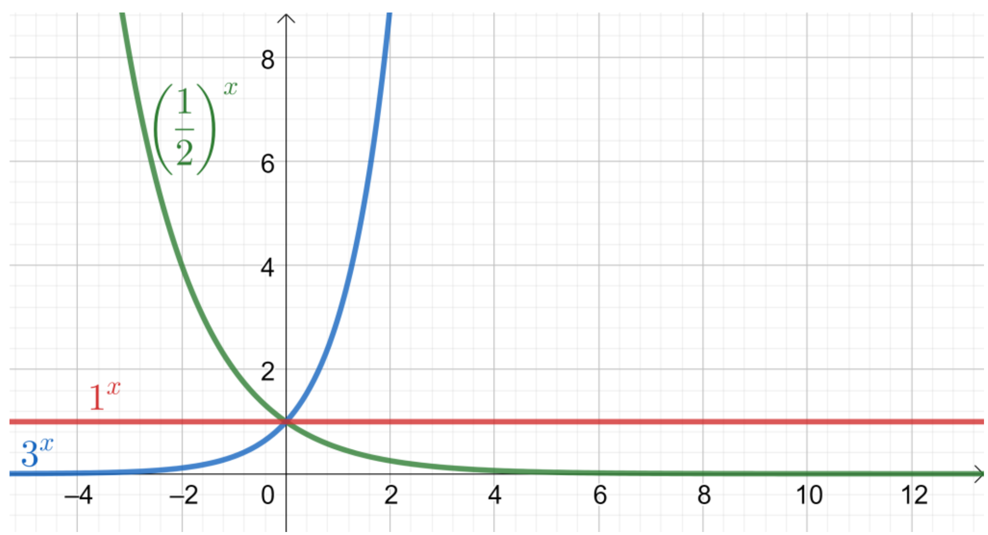
grundtal/base

Husk:

$$f(x+1) = Aa^{x+1}$$

$$= Aa^x a^1 = a(Aa^x)$$

$$= af(x)$$



# Den naturlige eksponentialfkt $e^x$

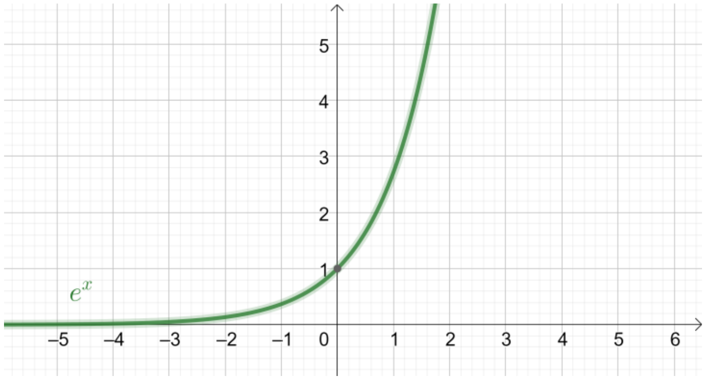
Tallet $e \in \mathbb{R}$:

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \qquad e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \qquad \ln(e) = 1$$

$$e \approx 2,71828\ldots$$

Den naturlige eksponentialfunktion er eksp.funktionen med grundtal/base $e$:

$$f(x) = e^x$$

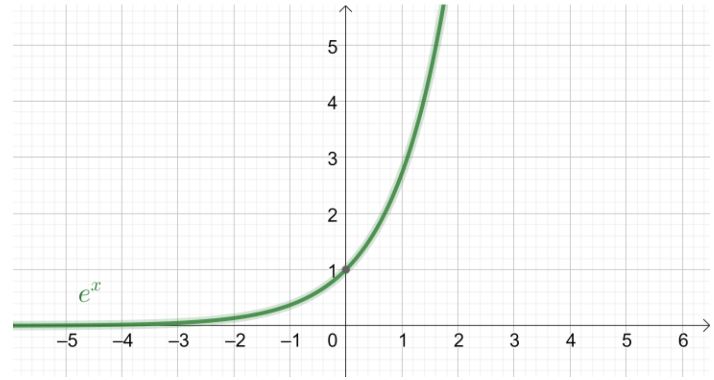



Husk potensregnereglerne:

$$e^{x+y} = e^x e^y \qquad \text{etc...}$$

# Den naturlige logaritmefkt $\ln$ (4.10)

$f(x) = e^x$ er strengt voksende og derfor injektiv

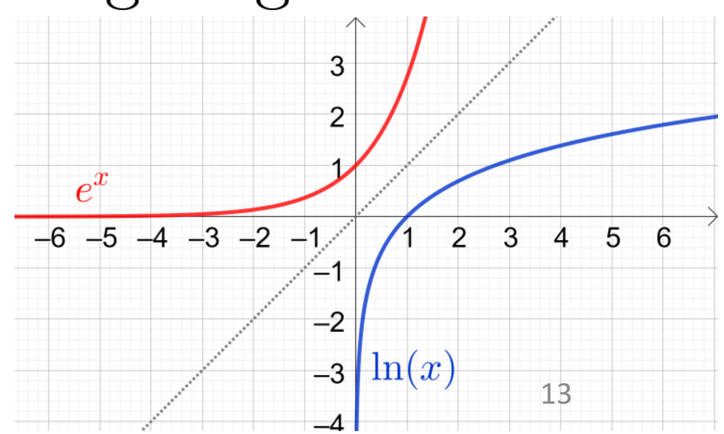



Værdimængde: $R_f = (0, \infty)$

Betragtet som fkt $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$
har $f(x) = e^x$ derfor invers $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

Det er vores definition af den naturlige log-fkt ln

Altså: $\ln(y)$ er det tal $x$ så $e^x = y$




Dvs:

$$\boxed{e^{\ln(y)} = y \text{ for alle } y \in (0, \infty)}$$

# Regneregler for $\ln$

For $x, y > 0$, $p \in \mathbb{R}$:

1) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

2) $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$

3) $\ln(x^p) = p\ln(x)$

4) $\ln(e^x) = e^{\ln(x)} = x$

1) Husk: $e^{\ln(xy)} = xy$ (fra def. af ln)

Vis: $e^{\ln(x)+\ln(y)} = xy$

$e^{\ln(x)} \cdot e^{\ln(y)} = \underline{x \cdot y}$

3) Vis: $e^{p\ln(x)} = x^p$

$e^{\ln(x)p} = \left(e^{\ln(x)}\right)^p = \underline{x^p}$

# Andre logaritme-funktioner

Logaritmefkt med grundtal/base $a > 1$ ($\log_a$):

Den inverse funktion til $f(x) = a^x$, altså

$$\boxed{a^{\log_a(y)} = y \text{ for alle } y \in (0, \infty)}$$

Heraf:

$\ln(x) = \ln(a) \cdot \log_a(x)$

Sammenhæng med den naturlige log-fkt:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$e^{\ln(x)}$ "

$$x = a^{\log_a(x)} = \left(e^{\ln(a)}\right)^{\log_a(x)} = e^{\ln(a) \cdot \log_a(x)}$$

Heraf følger nemt regneregler for $\log_a$:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad \text{etc... (se s. 135)}$$

# To korte øvelser (hvis tid)

Lad $a, K > 0$ være konstanter.

1) Løs ligningen: $\frac{e^{ax}}{K} = 7$

$e^{ax} = 7K$

$ax = \ln(7K) = \ln(7) + \ln(K)$

$x = \frac{\ln(7)+\ln(K)}{a}$

PINGO!

708646

2) Er nedenstående formel korrekt?

JA!

$$\ln(a\sqrt{K}) = \frac{\ln(K)+2\ln(a)}{2}$$

$\ln(aK^{\frac{1}{2}}) = \ln(a) + \ln(K^{\frac{1}{2}}) = \ln(a) + \frac{1}{2}\ln(K)$

$= \frac{2\ln(a)+\ln(K)}{2}$ ✓