Matematik A E2019
Uge 39, Forelæsning 1

Afsnit 6.1-6.4 og 6.6-6.8

Start på differentialregning

Differentialkvotient og tangent (6.1-2)

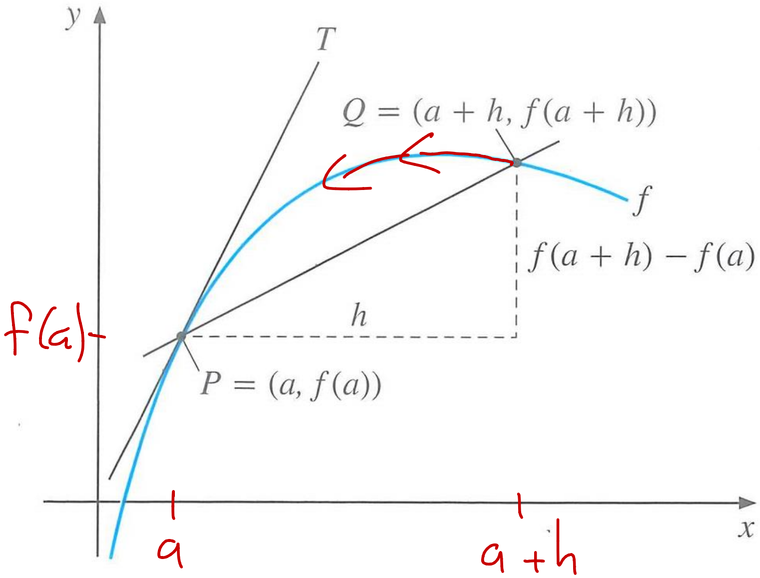


Figure 6.2.3 Newton quotient

Differentialkvotient:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Tangentens ligning:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Hvis $y = f(x)$ er differentiabel overalt,
har vi flg notation for den afledte fkt $f'(x)$:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

Eksempel (jvf øvelse fra sidst): For $f(x) = x^2$ er $f'(x) = 2x$

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$\to 2x$ når $h \to 0$

Eksempel/øvelse

Lad $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

Vis: For ethvert $a \neq 0$ gælder $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

[Hint: Opstil differenskvotient og forlæng med passende udtryk]

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{a - (a+h)}{h \cdot (a+h) \cdot a}$$

$$= \frac{-h}{h \cdot (a+h) \cdot a} = \frac{-1}{(a+h) \cdot a}$$

$$\to \frac{-1}{a^2} \text{ når } h \to 0$$

Monotoniforhold (6.3)

$f'(x) \geq 0$ for alle x i interval I $\Leftrightarrow$ f er voksende i I

$f'(x) \leq 0$ for alle x i interval I $\Leftrightarrow$ f er aftagende i I

$f'(x) = 0$ for alle x i interval I $\Leftrightarrow$ f er konstant i I

$f'(x) > 0$ for alle x i interval I $\Rightarrow$ f er strengt voksende i I

$f'(x) < 0$ for alle x i interval I $\Rightarrow$ f er strengt aftagende i I

"$\Leftarrow$" gælder ikke!

Ex: $f(x) = x^3$ strengt voks., men $f'(0) = 0$.

"$\Rightarrow$" SENERE (Middelværdisæt.)

"$\Leftarrow$" Antag f voksende

$$f(x+h) - f(x) \begin{cases} \geq 0 & \text{når } h > 0 \\ \leq 0 & \text{når } h < 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \qquad \text{Derfor} \quad f'(x) \geq 0$$

Differentialkvot. i økonomi (6.4)

En virksomhed producerer én type af vare.

$C(x)$: Omkostningen ved produktion af x enheder, "omkostningfkt"

$C'(x)$: "Marginalomkostningen" ved produktionen x

$$C'(x) \approx \frac{C(x+1) - C(x)}{1} = C(x+1) - C(x)$$

Antag virksomheden kan afsætte produktion til fast pris p

Profitfunktion: $\pi(x) = p \cdot x - C(x)$

Marginal profit: $\pi'(x) = p - C'(x) \approx \pi(x+1) - \pi(x)$

Differentiabel => Kontinuert (s. 262-3)

$$\boxed{\text{Hvis } f \text{ er differentiabel i } x = a, \text{ så er } f \text{ kontinuert i } x = a}$$

Da f er diff. i $x=a$

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot h \longrightarrow f'(a) \cdot 0 = 0$$

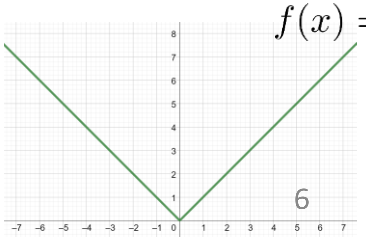
når $h \to 0$

Altså: $f(a+h) \to f(a)$ når $h \to 0$

Dvs. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Det omvendte gælder ikke!

$f(x) = |x|$



Regneregel: Potensfunktioner (s. 190)

Lad $a \in \mathbb{R}$ og betragt potensfunktionen $f(x) = x^a$.
Da har vi:

$$f'(x) = ax^{a-1} \qquad \text{(hvor defineret)}$$

$a=0$ ✓
$a=1$ ✓ } (nemt...)

$a=2$ ✓ (øvelse fra sidst)

$a=-1$ ✓ (i dag)

$a=\frac{1}{2}$ ✓ (til holdunderv.)

Generelt: (senere) $x^a = e^{\ln(x)\cdot a}$

Regneregler: Sum, produkt, kvotient (6.7)

Antag f, g er differentiable i x.
Så er funktionerne $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ og $\frac{f}{g}$ (hvis $g(x) \neq 0$) differentiable i x med:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Øvelse

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Differentiér funktionerne f og g:

$$f(x) = (2\sqrt{x} + 1)(x^2 + 1), \quad \text{hvor } x > 0$$

$$f'(x) = \left(2 \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right)(x^2+1) + \left(2x^{\frac{1}{2}}+1\right)(2x)$$

$$= x^{3/2} + x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{3/2} + 2x = \underline{5x^{3/2} + 2x + x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$g(x) = \frac{x^3+2}{x^2+1}$$

$$g'(x) = \frac{(3x^2)(x^2+1) - (x^3+2)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 - 4x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 - 4x}{(x^2+1)^2}$$

Bevis: Kvotientreglen

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}}$$

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} = \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{h\,g(x)\,g(x+h)}$$

$$= \frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x) + f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{h\,g(x)\,g(x+h)}$$

$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \frac{g(x)}{g(x)g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)g(x+h)} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\xrightarrow{h \to 0} f'(x) \cdot \frac{g(x)}{g(x)^2} - \frac{f(x)}{g(x)^2} \cdot g'(x)$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Produktreglen: Økon. eks (ex 6.7.4)

$D(P)$: efterspørgsel (demand) efter virksomheds produkt som fkt af pris P

Virksomhedens indtægt (revenue): $\quad R(P) = P \cdot D(P)$

Hvad sker der hvis virksomheden øger prisen en smule (fx 1 kr)?

a) Højere indtægt pr solgt vare (↑)

b) Lavere efterspørgsel (↓) (vi antager $D'(P) < 0$)

Ændringen i revenue (approximativt):

$$R(P+1) - R(P) \approx R'(P) = \underbrace{1 \cdot D(P)}_{a)} + \underbrace{P \cdot D'(P)}_{b)}$$

<u>Bemærk</u>: Produktreglen opdeler den marginale effekt i hhv den positive effekt (a) og den negative effekt (b).

Kædereglen (6.8)

Differentiation af sammensat funktion $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

$g(x)$

$f(u)$

Antag g er differentiabel i x_0 og at f er differentiabel i $g(x_0)$. Da er $f \circ g$ differentiabel i x_0 med:

$$(f \circ g)'(x_0) = g'(x_0) \cdot f'(g(x_0))$$

Med "Leibniz-notation":

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

(se bogen!)

Eksempel: Bestem $h'(x)$ når $h(x) = (x^2+1)^5$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = x^2+1 \\ f(u) = u^5 \end{array}\right\} h(x) = (f \circ g)(x)$$

$$h'(x) = 2x\, 5(x^2+1)^4$$

$$= 10x(x^2+1)^4$$

Øvelse

Differentiér flg funktioner:

$$r(x) = \sqrt{x^5 + \frac{1}{x}}, \quad \text{hvor } x > 0$$

$g(x) = x^5 + \frac{1}{x} = x^5 + x^{-1}$

$f(u) = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$

$r(x) = (f \circ g)(x)$

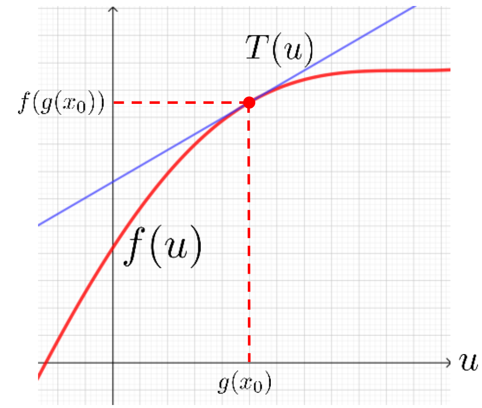
$r'(x) = (5x^4 - x^{-2}) \frac{1}{2} (x^5 + x^{-1})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(5x^4 - x^{-2})(x^5 + x^{-1})^{-\frac{1}{2}}$

$$s(x) = (1 + \sqrt{x^4 + 2})^3$$

SE SLIDE NR. 16 FOR LØSNING

Lad os argumentere for at kædereglen gælder:

$$(f \circ g)'(x_0) = g'(x_0) \cdot f'(g(x_0))$$



Lad $T(u)$ være tangenten til f i punktet $g(x_0)$:

$$T(u) = f'(g(x_0))(u - g(x_0)) + f(g(x_0))$$

For u tæt på $g(x_0)$ har vi $f(u) \approx T(u)$

Dermed har vi for x tæt på x_0: $(f \circ g)(x) \approx (T \circ g)(x) = T(g(x))$

(og der gælder "=" i $x = x_0$)

Derfor rimeligt at antage: $(f \circ g)'(x_0) = (T \circ g)'(x_0)$

$$(T \circ g)(x) = T(g(x)) =$$

Lad $g(x) = x^4+2$, $f(u) = 1+\sqrt{u}$ og $h(y) = y^3$

Betragt først $t(x) = (f \circ g)(x) = 1+\sqrt{x^4+2}$.

Kædereglen: $t'(x) = 4x^3 \cdot \frac{1}{2}(x^4+2)^{-\frac{1}{2}} = 2x^3(x^4+2)^{-\frac{1}{2}}$

Betragt da $s(x) = (h \circ t)(x)$

Kædereglen:

$$s'(x) = t'(x) \cdot h'(t(x)) = 2x^3(x^4+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3\left(1+\sqrt{x^4+2}\right)^2$$

$$= \underline{\underline{\frac{6x^3 \cdot \left(1+\sqrt{x^4+2}\right)^2}{\sqrt{x^4+2}}}}$$