Matematik A E2019
Uge 40, Forelæsning 1

Afsnit 8.1-8.5

Optimering (1 variabel)

Middelværdisætningen

(Globale) Ekstremumspunkter (8.1)

Lad $f : D \to \mathbb{R}$

$c \in D$ er et **maximumspunkt** for f hvis (og kun hvis)

$$f(c) \geq f(x) \quad \text{for alle } x \in D.$$

$f(c)$ kaldes **maksimumsværdien** for f.

$d \in D$ er et **minimumspunkt** for f hvis (og kun hvis)

$$f(d) \leq f(x) \quad \text{for alle } x \in D.$$

$f(d)$ kaldes **minimumsværdien** for f.

Eksempel: $f(x) = e^{2x} - 2e^x - 3$, hvor $x \in \mathbb{R}$

$f(x) = (e^x)^2 - 2e^x + 1 - 4 = (e^x - 1)^2 - 4 \geq -4$

$f(0) = -4 \to x = 0$ er et minimumspkt. (og det eneste)

$f(x) \to \infty$ når $x \to \infty$, derfor intet max-pkt.

Nødv. Førsteordensbetingelse/FOC

Lad $f : I \to \mathbb{R}$, hvor I er interval.

$x \in I$ er et **indre punkt**, hvis det ikke er et endepunkt.

Antag f er differentiabel.

$c \in I$ er et **kritisk punkt**/stationært punkt, hvis $f'(c) = 0$.

Sætning (8.1.1):
Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være differentiabel og c være et indre punkt i I.
Hvis c er et ekstremumspunkt (maksimum eller minimum),
så er det et kritisk punkt:

$$f'(c) = 0 \quad \text{(Førsteordensbetingelse/FOC)}$$

Bevis: Antag c er et maksimumspunkt...

$f(c+h) - f(c) \leq 0$ for alle h

For $h>0$: $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$

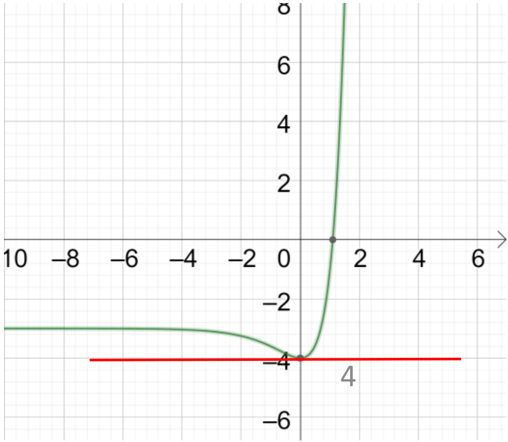
$$f'(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

For $h<0$: $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$

$$f'(c) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

Da $f'(c) \leq 0$ og $f'(c) \geq 0$, så må $f'(c) = 0$.

Eksempel (igen): $f(x) = e^{2x} - 2e^x - 3$, hvor $x \in \mathbb{R}$



CHECK $f'(0) = 0$:

$f'(x) = 2 \cdot e^{2x} - 2e^x$

$f'(0) = 2 \cdot e^0 - 2e^0 = 0$ ✓

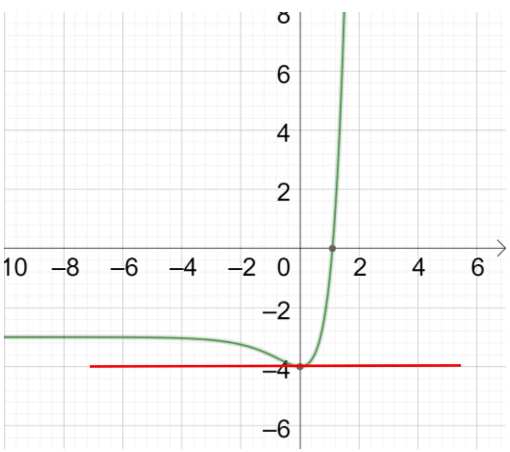
Simpel test for ekstr.-pkt (8.2)

Sætning (8.2.1):
Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være diff. og c være et (indre) kritisk pkt.

Hvis $f'(x) \geq 0$ for alle $x < c$ og $f'(x) \leq 0$ for alle $x > c$, så er c et maksimumspunkt.

Hvis $f'(x) \leq 0$ for alle $x < c$ og $f'(x) \geq 0$ for alle $x > c$, så er c et minimumspunkt.

$f(x) = e^{2x} - 2e^{x} - 3$



$$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{x} = 2e^{x}(e^{x}-1) \begin{cases} <0 \text{ for } x<0 \\ >0 \text{ for } x>0 \end{cases}$$

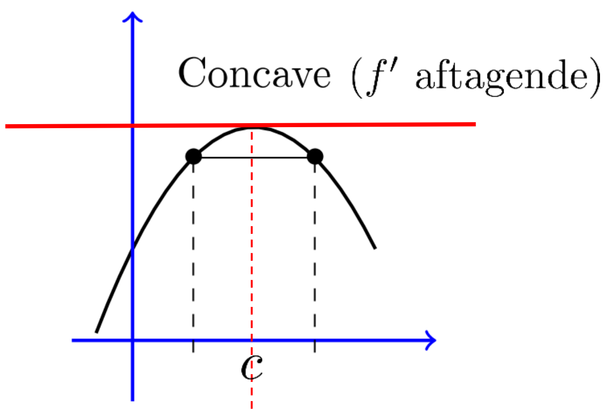
$\xrightarrow{\text{sætning}}$ $x=0$ er min-pkt.

Konvekse/konkave fkt

Sætning (8.2.2):
Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være diff. og c være et (indre) kritisk pkt.

Hvis f er konkav $(f''(x) \leq 0)$, så er c et maksimumspunkt.

Hvis f er konveks $(f''(x) \geq 0)$, så er c et minimumspunkt.



$f'(x) \geq 0$ $\quad$ $f'(x) \leq 0$

f voksende for $x \leq c$ $\quad$ f aftagende for $x \geq c$

Ekstremværdisætningen (8.4)

Ekstremværdisætningen (8.4.1):

En kontinuert funktion f på et afsluttet begrænset interval $[a, b]$ har et maksimumspunkt og et minimumspunkt.

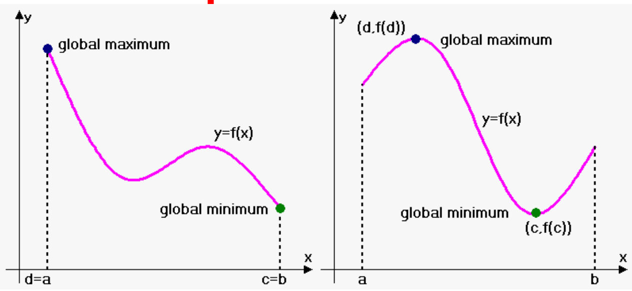
Der findes altså $c, d \in [a, b]$ så:

$$f(d) \leq f(x) \leq f(c) \quad \text{for alle } x \in [a, b].$$

For en differentiabel fkt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kan vi finde alle ekstremumspunkter ved at "lede" blandt:

1) alle kritiske punkter for f i (a, b)

2) endepunkterne a og b



Øvelse

Find alle ekstremumspunkter for funktionen $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ på hvert af følgende intervaller: $[-2,1]$, $[-2,2]$ og $[1,2]$.

Kritiske pkt: $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1) - (x^2+2)2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

Kun et krit. pkt: $\underline{x=0}$. $f(0) = 2$

$[-2,1]$: $f(-2) = \frac{6}{5}$ min-pkt: $x = -2$

$f(1) = \frac{3}{2}$ max-pkt: $x = 0$

$[-2,2]$: $f(-2) = f(2) = \frac{6}{5}$ min-pkt: $x = -2$ og $x = 2$

max-pkt: $x = 0$

$[1,2]$: $f(1) = \frac{3}{2}$ min-pkt: $x = 2$

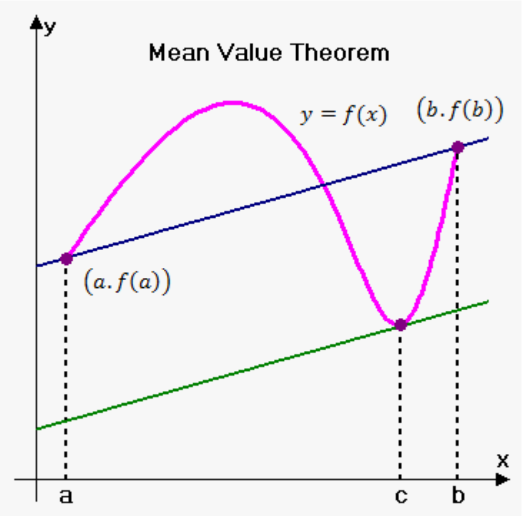
$f(2) = \frac{6}{5}$ max-pkt: $x = 1$

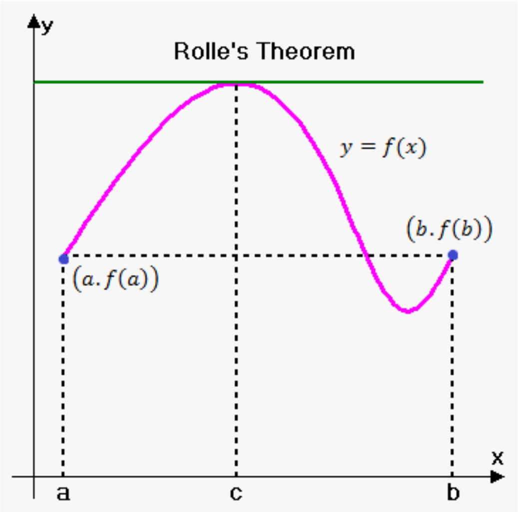
Middelværdisætningen (s. 297-9)

Middelværdisætningen (8.4.2):
Lad f være en funktion, der er kontinuert på det afsluttede og begrænsede interval $[a, b]$ og differentiabel på det åbne interval (a, b).

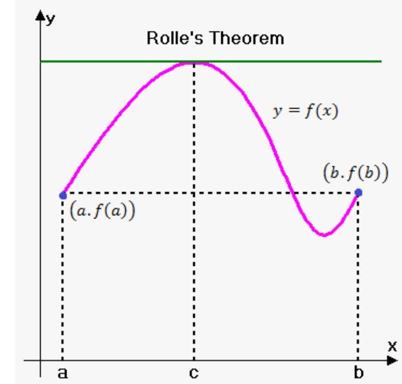
Så findes (mindst) et $x^* \in (a, b)$ så:

$$f'(x^*) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$





Rolles sætning:
Lad g være en fkt, der er kontinuert på $[a, b]$, differentiabel på (a, b) og opfylder $g(a) = g(b)$.
Så findes et $x^* \in (a, b)$ så $g'(x^*) = 0$



Bevis: Hvis g er konstant er udsagnet trivielt.

Antag derfor g ikke er konstant.

Så findes $x \in (a,b)$ så $g(x) > \overset{=g(b)}{g(a)}$ eller $g(x) < \overset{g(b)}{\overset{\shortparallel}{g(a)}}$

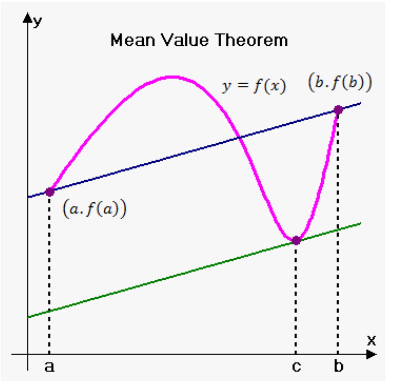
→ Alle max-pkt for g (der findes mindst ét!) må ligge i (a,b).

Vælg ét af disse: x^*

FOC: $g'(x^*)=0$

[Det andet tilfælde beh. tilsv.] $\square$

Bevis for Middelværdisætn. vha Rolles sætning:



$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$g(a) = g(b) = 0$$

Vi kan anvende Rolle på g:

$$x^* \in (a,b) : \quad g'(x^*) = 0$$

Af def. på g fås:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Derfor:

$$g'(x^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x^*) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\square$

Påstand fra afsnit 6.3 (uge 39 forelæsning 1):

$f'(x) \geq 0$ for alle x i interval $I \quad \Leftrightarrow \quad f$ er voksende i I

Implikationen $\Rightarrow$ kan nu bevises vha. Middelværdisætningen:

Lad $x_2 > x_1$. vis: $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Brug Middelværdisætn. på intervallet $[x_1, x_2]$:

$$f'(x^*) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{for et } x^* \in (x_1, x_2)$$

Pr. antagelse: $f'(x^*) \geq 0$

Heraf $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, dvs.

$$\underline{f(x_2) \geq f(x_1)} \quad \square$$

Øvelse

Betragt funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ på intervallet $[0, 4]$.
Find $x^* \in (0, 4)$ så:

$$f'(x^*) = \frac{f(4)-f(0)}{4-0}$$

(pingo.coactum.de, 708646)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x^*}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \longrightarrow x^* = 1$$

Extra: Gør det tilsvarende for $g(x) = \ln(2x)$ på intervallet $[1, e]$.

Se næste slide

$$g'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2x} = \frac{1}{x}$$

$$g(1) = \ln(2)$$

$$g(e) = \ln(2e) = \ln(2) + \ln(e) = \ln(2) + 1$$

$$\frac{1}{x^*} = \frac{g(e) - g(1)}{e - 1} = \frac{1}{e-1}$$

Heraf: $x^* = e - 1$