Matematik A E2019
Uge 40, Forelæsning 2

Afsnit 8.6-8.7

Lokale ekstremumspunkter, vendetangenter mv.

+ Nyttemaksimeringsproblem

Lokale ekstremumspunkter (8.6)

Lad $f : I \to \mathbb{R}$

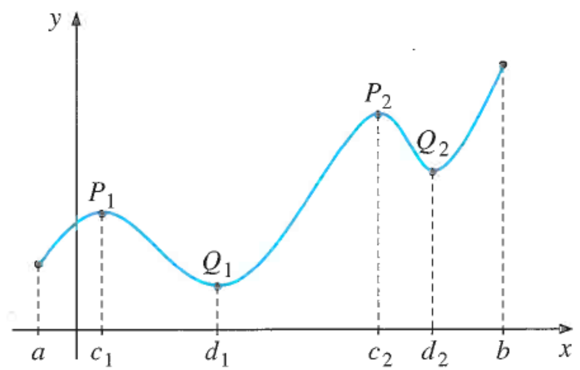
$c \in I$ er et **lokalt maximumspunkt** for f hvis

$$f(c) \geq f(x) \quad \text{for alle } x \text{ i et interval omkring } c.$$

$d \in I$ er et **lokalt minimumspunkt** for f hvis

$$f(d) \leq f(x) \quad \text{for alle } x \text{ i et interval omkring } d.$$

Grafisk eksempel:



Nødvendig førsteordensbetingelse (FOC):
Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være differentiabel og c være et indre punkt i I.
Hvis c er et lokalt ekstremumspunkt (maks. eller min.),
så er det et kritisk punkt: $f'(c) = 0$

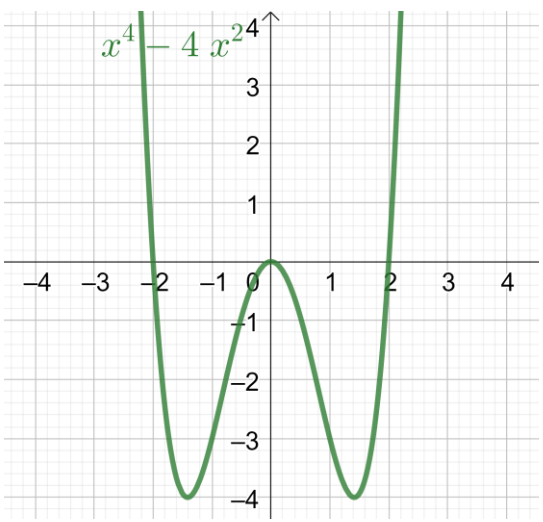
Test for lokale ekstr.-pkt vha f’

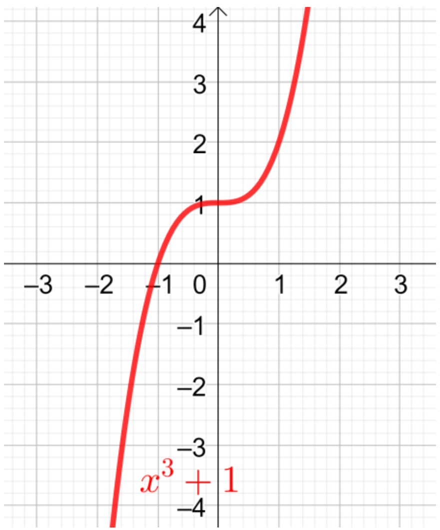
Sætning (8.6.1):
Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være diff. og c være et indre kritisk pkt.

Hvis $f'(x) \geq 0$ i interval (a, c) og $f'(x) \leq 0$ i interval (c, b), så er c et lokalt maksimumspunkt.

Hvis $f'(x) \leq 0$ i interval (a, c) og $f'(x) \geq 0$ i interval (c, b), så er c et lokalt minimumspunkt.

Hvis $f'(x) > 0$ (eller $f'(x) < 0$) i intervaller (a, c) og (c, b), så er c *ikke* et lokalt ekstremumspunkt.





Test for lokale ekstr.-pkt vha f''

Sætning (8.6.2):

Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være to gange diff. og c være et indre kritisk pkt.

Hvis $f''(c) < 0$, så er c et (strengt) lokalt maksimumspunkt.

Hvis $f''(c) > 0$, så er c et (strengt) lokalt minimumspunkt.

$f(c) > f(x)$ i interval omkr. c.

Bevis (første del): Antag $f'(c) = 0$ og $f''(c) < 0$.

$$f''(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h)}{h} < 0$$

For h "tæt på nul": $\frac{f'(c+h)}{h} < 0$

Derfor (når h "tæt på nul"):

$$f'(c+h) \begin{cases} > 0 & \text{for } h < 0 \\ < 0 & \text{for } h > 0 \end{cases}$$

Vha Sætn. 8.6.1: c er lokalt makspkt. $\square$

Øvelse

$$f(x) = x^3 e^x$$

Bestem alle kritiske punkter for f (pingo.coactum.de, 708646)

Klassificér alle de kritiske punkter
(lokalt/globalt max/min eller "saddelpunkt")

$f'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x = (x^3 + 3x^2)e^x = x^2(x+3)e^x$

$f'(x) = 0 \iff \underline{x = -3}$ eller $\underline{x = 0}$

$x < -3$: $f'(x) < 0$

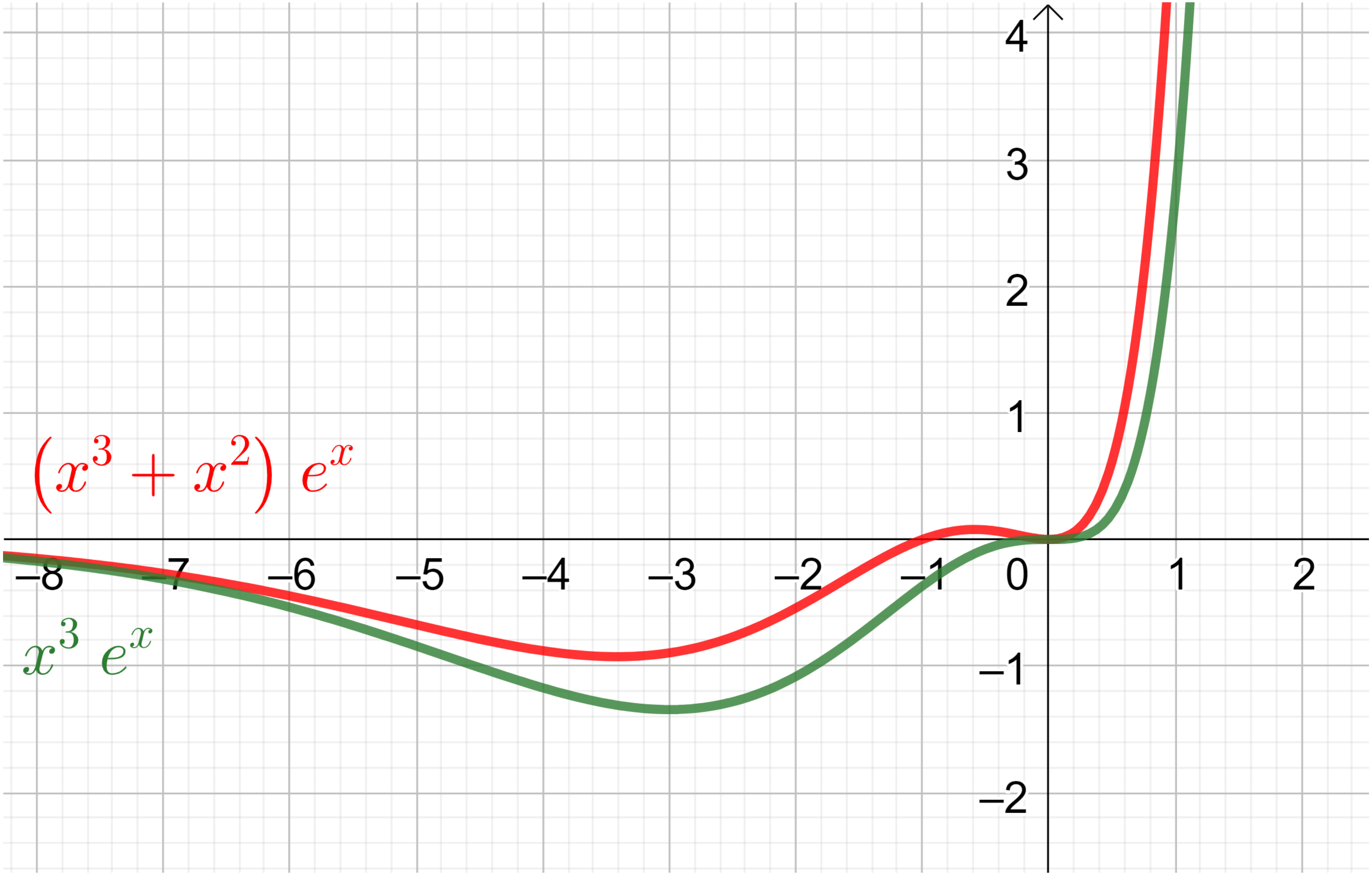
$-3 < x < 0$: $f'(x) > 0$

$x > 0$: $f'(x) > 0$

$\underline{x = -3}$: Globalt min-pkt.

$\underline{x = 0}$: "saddelpkt" (hverken lok. max eller lok. min)

Extra: Prøv med $g(x) = (x^3 + x^2)e^x$



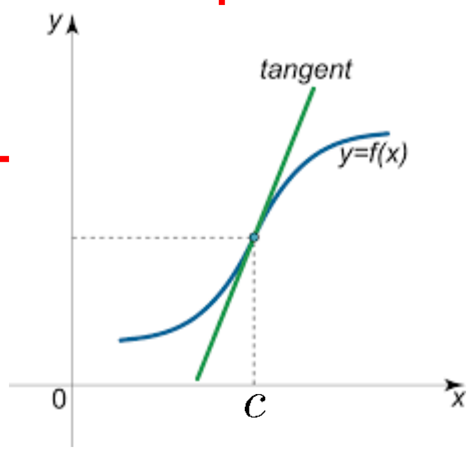
4
3
2
1
0
−1
−2
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
$(x^3 + x^2)\ e^x$
$x^3\ e^x$

Vendetangenter/inflection points (8.7)

Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være to gange differentiabel.
f har vendetangent i det indre punkt c, hvis der findes interval (a, b) omkring c så:

$$f''(x) \geq 0 \text{ i } (a, c) \text{ og } f''(x) \leq 0 \text{ i } (c, b) \; \textit{eller}$$

$$f''(x) \leq 0 \text{ i } (a, c) \text{ og } f''(x) \geq 0 \text{ i } (c, b)$$



"f skifter fra at være konveks til konkav (eller omvendt) i c"

Nødvendig bet. for vendetangent (Thm 8.7.1)

Hvis f'' er kontinuert og f har vendetangent i c, så gælder:

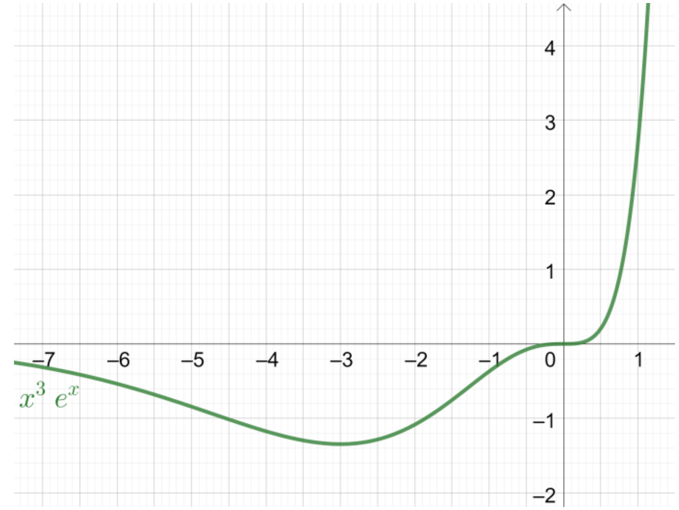
$$f''(c) = 0$$

Øvelse

$$f(x) = x^3 e^x$$

Bestem alle "inflection points" c for f (altså alle de c, hvor f har vendetangent)

Lav evt fortegnsdiagram for f''



$f'(x) = (x^3 + 3x^2)e^x$

$f''(x) = (3x^2 + 6x)e^x + (x^3 + 3x^2)e^x = (x^3 + 6x^2 + 6x)e^x$

$= x(x^2 + 6x + 6)e^x$

$f''(x) = 0 \iff x = 0$ eller $x^2 + 6x + 6 = 0$

$x = -3 \pm \sqrt{3}$

$x < -3-\sqrt{3}$: $f'' < 0$

$-3-\sqrt{3} < x < -3+\sqrt{3}$: $f'' > 0$

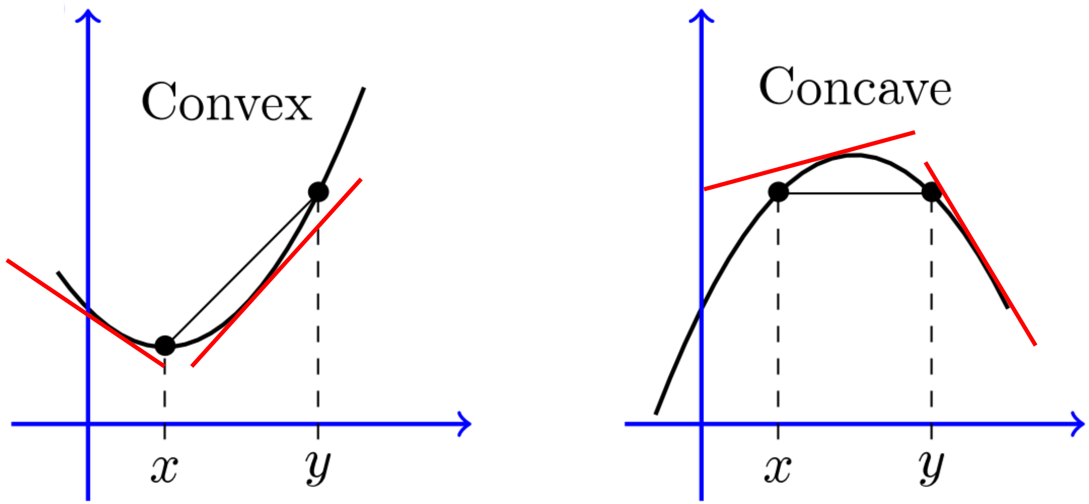
$-3+\sqrt{3} < x < 0$: $f'' < 0$

$x > 0$: $f'' > 0$

f har vendetangent i alle de tre pkt:

$x = -3-\sqrt{3}$, $x = -3+\sqrt{3}$, $x = 0$

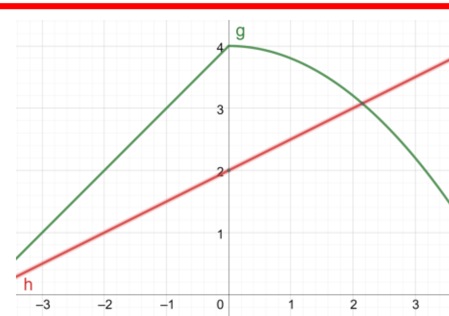
Konveks/konkav: Generel definition



f er konveks, hvis det for ethvert par af punkter på grafen gælder, at liniestykket mellem disse punkter ligger på eller over grafen

f er konkav, hvis det for ethvert par af punkter på grafen gælder, at liniestykket mellem disse punkter ligger på eller under grafen

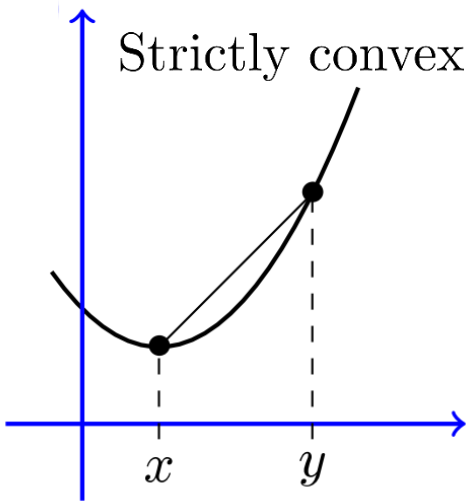
Eksempel: Er disse fkt konvekse/konkave?

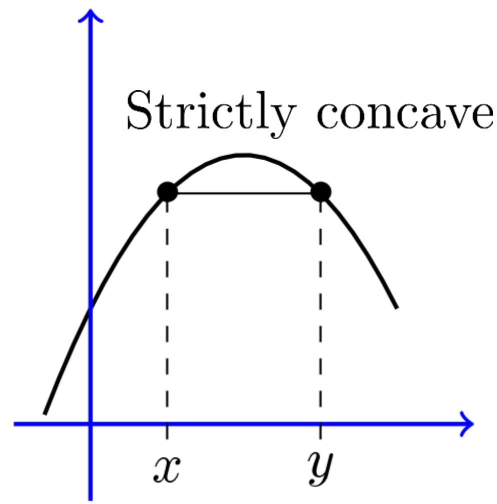


konveks ✓
konkav ✓

konveks %
konkav ✓

Strengt Konveks/konkav





f er *strengt konveks*, hvis det for ethvert par af punkter på grafen gælder, at liniestykket mellem disse punkter ligger *over* grafen. Tilstrækkelig betingelse: $f''(x) > 0$ for alle x.

f er *strengt konkav*, hvis det for ethvert par af punkter på grafen gælder, at liniestykket mellem disse punkter ligger *under* grafen Tilstrækkelig betingelse: $f''(x) < 0$ for alle x.

NB: g og h i eksemplet på slide 10 er hverken strengt konvekse eller strengt konkave.

Nyttemaksimeringsproblem

- Forbrugssituation med 2 varer
  - Varebundt (consumption bundle): (x, y), hvor $x, y \geq 0$
  - Priser: $p > 0$ og $q > 0$
  - Indkomst/formue: $m > 0$

- Budgetmængden er de varebundter (x, y), der opfylder budgetbetingelsen: $px + qy \leq m$

- Forbrugerens "smag" (præferencer) er givet ved en nyttefunktion $u(x, y)$
  -> "Nyttemaksimeringsproblem":

$$\boxed{\max_{x,y \geq 0} u(x, y) \quad \text{under bibetingelsen} \quad px + qy \leq m}$$

Eksempel/øvelse: $u(x,y) = \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y)$

$$\boxed{\max_{x,y>0} \ \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y) \quad \text{u.b.} \quad px + qy = m}$$

1) Isolér y i bibetingelsen. $y = \frac{m - px}{q} = \frac{m}{q} - \frac{p}{q}x$

2) Omform problemet til et optimeringsproblem med kun én variabel (x). Hvilket interval er det, vi skal finde maksimum på?

3) Løs problemet, dvs. bestem maksimumspunktet x^*. Bemærk, at det kan afhænge af parametrene p, q og m.

pingo.coactum.de (708646)

4) Bestem også det optimale forbrug af vare 2 (y^*).
Hvordan afhænger det optimale forbrug af hver af de to varer (x^* og y^*) af p, q og m?

5) Hvor stor en andel af sin indkomst m bruger forbrugeren på vare 1?

[Ekstra: Prøv med $u(x,y) = \alpha\ln(x) + (1-\alpha)\ln(y)$, hvor $0 < \alpha < 1$]

$$\boxed{\max_{x,y>0} \ \frac{1}{3}\ln(x)+\frac{2}{3}\ln(y) \quad \text{u.b.} \quad px+qy=m}$$

2) max $\frac{1}{3}\ln(x)+\frac{2}{3}\ln\left(\frac{m-px}{q}\right)$ mht x

på intervallet $\left(0,\frac{m}{p}\right)$

[Den øvre grænse kommer fra betingelsen $y>0$]

3) Find kritisk pkt (der er kun et)

Vis, at det er et globalt max-pkt.

Lad $f(x)=\frac{1}{3}\ln(x)+\frac{2}{3}\ln\left(\frac{m-px}{q}\right)$

Så er $f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{p}{q}\right)\cdot\frac{1}{\frac{m-px}{q}}$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}-\frac{2}{3}\frac{p}{m-px}=\frac{1}{3}x^{-1}-\frac{2}{3}p(m-px)^{-1}.$$

$$\boxed{\max_{x,y>0} \ \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y) \quad \text{u.b.} \quad px + qy = m}$$

$f'(x) = 0 \iff \underline{x = \frac{m}{3p}}$, så det er eneste kritiske punkt.

$$f''(x) = \frac{1}{3}(-x^{-2}) - \frac{2}{3}p(-p)\left(-(m-px)^{-2}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}x^{-2} - \frac{2}{3}p^2(m-px)^{-2} < 0$$, dvs. f er konkav

Da f er konkav, er det kritiske pkt et globalt maks-pkt. (Thm 8.2.2, s. 289)

Altså er vores løsning: $\underline{x^* = \frac{m}{3p}}$

4) $y^* = \frac{m - px^*}{q} = \frac{m - \frac{m}{3}}{q} = \underline{\frac{2m}{3q}}$

$$\boxed{\max_{x,y>0} \ \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y) \quad \text{u.b.} \quad px + qy = m}$$

5) Andel af indkomst brugt på vare 1:

$$\frac{px^*}{m} = \frac{p \cdot \frac{m}{3p}}{m} = \frac{1}{3}$$

Bemærk: uafhængigt af p, q og m.