Matematik A E2019
Uge 43, Forelæsning 1

Afsnit 7.11 og 10.1-4

Følger, (uendelige) rækker, rentetilskrivning

Følger/"sequences" (7.11)

En (tal)følge $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ (eller bare $\{s_n\}$) består af reelle tal:

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5,\ \ldots$$

Kan opfattes som funktion $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, idet vi lader $s(1) = s_1$, $s(2) = s_2$, etc.

Alternativ notation: $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eller bare (s_n)

Eksempler:

$s_n = \frac{1}{n}$ $\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

$s_n = (-1)^n$ $\quad -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

$s_1 = 1$, $s_2 = 1$ og $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$ for alle $n \geq 3$

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

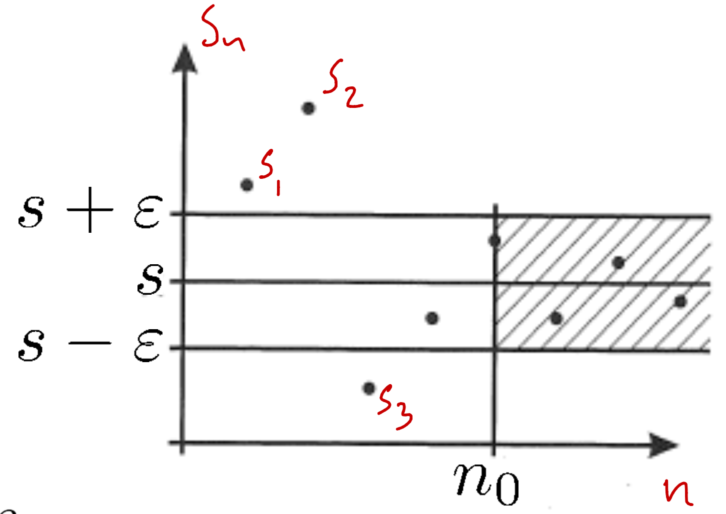
Konvergens af følger

Løs definition:

En følge $\{s_n\}$ er konvergent med grænseværdien $s \in \mathbb{R}$, hvis følgens elementer "efterhånden er vilkårligt tæt på s". Så skriver vi

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} s_n = s}$$

$$(\text{eller } s_n \to s \quad \text{for} \quad n \to \infty)$$



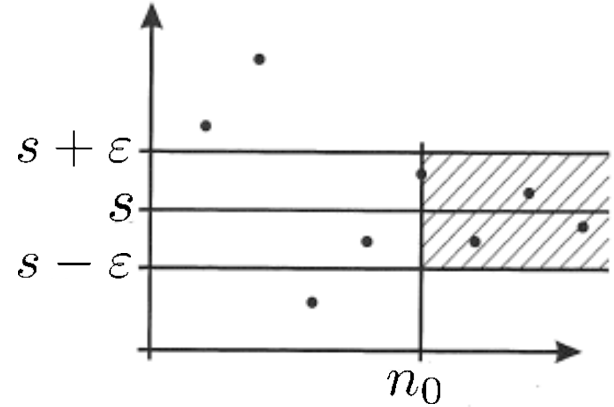
Præcis definition:

For alle $\varepsilon > 0$ findes $n_0 \in \mathbb{N}$ så

$$|s_n - s| < \varepsilon \text{ for alle } n > n_0$$

Bemærk analogien til definitionen af $\lim_{x\to a} f(x) = A$

Eksempler



$$s_n = \frac{1}{n} \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$$

$$|s_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$$

Kan gøres vilk. lille ved at vælge n tilstr. stor.

Dvs $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

$$s_n = (-1)^n$$

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1$$

Ikke konvergent!

Da følgen bliver ved med at "hoppe" ml. -1 og 1.

Uendelige rækker/"infinite series" (10.4)

En uendelige række er (løst sagt!) en uendelig sum af reelle tal:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

Giver det mening med en sådan uendelig sum?

Lad os - på løsagtigt grundlag - overveje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots$$

$$= 0{,}1111\dots = \frac{1}{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\left[\text{Faktisk} = \frac{\pi^2}{6}\right] \qquad ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

$$\text{"} = \infty \text{"}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

$$= 0\,? \qquad = -1\,? \qquad ?$$

Afsnitsfølgen og konvergens

For en uendelige række $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

består *afsnitsfølgen* $\{s_n\}$ af "partial-summerne"

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

(Dvs. $s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$)

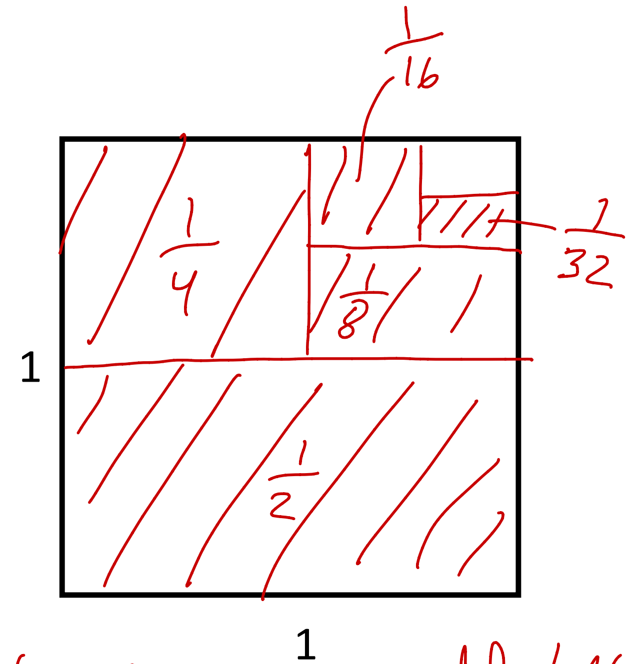
Hvis afsnitsfølgen $\{s_n\}$ er konvergent med $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, så siges den uendelige række at være konvergent med sum s:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s \quad \left(= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

Eksempler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$= 1$$



Når vi tager flere og flere led med i summen, kommer vi vilk. tæt på at få udfyldt kvadratet.

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

Afsnitsfølge: $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $s_3 = -1$, $s_4 = 0$, ...

$$s_n = \begin{cases} -1 & n \text{ ulige} \\ 0 & n \text{ lige} \end{cases}$$

Afsnitsflg. ikke konv. Derfor er den uendelige række ikke konv!

Vigtigt og nyttigt resultat, (10.4.8) s. 387:

Hvis den uendelige række $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ er konvergent, så gælder:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Bevis:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i = s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0$$

for $n \to \infty$

Geometriske rækker (potensrækker)

(Uendelig) Geometrisk række ($a, k \in \mathbb{R}$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} ak^{n-1} = a + ak + ak^2 + ak^3 + \dots$$

(Bemærk: $\sum_{n=1}^{\infty} ak^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ak^n$)

Eksempler:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{10})^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{10})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$

Konvergens og sum af uendelig geom. række, (10.4.5) s. 386:

Den geometriske række $\sum_{n=1}^{\infty} ak^{n-1}$

er konvergent hvis og kun hvis $|k| < 1$, og så er summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} ak^{n-1} = \frac{a}{1-k}$$

Eksempler fra før:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \underline{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{10})^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \underline{\frac{10}{9}}$$

Øvelse

$$\sum_{n=1}^{\infty} ak^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ak^{n} = \frac{a}{1-k} \quad (\text{for } |k| < 1)$$

Bestem summen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1}} = 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \frac{2}{125} + \dots$$

pingo.coactum.de
(708646)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{2}{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\frac{4}{5}} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Endelig geometrisk række

Sum af endelig geom. række (10.4.3) s. 384:

For alle reelle tal a og $k \neq 1$ gælder:

$$\sum_{i=1}^{n} ak^{i-1} = a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} = a \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

Bevis: Lad $s_n = \sum_{i=1}^{n} ak^{i-1} = a + \cancel{ak} + \cancel{ak^2} + \ldots + \cancel{ak^{n-1}}$.

$$k s_n = \cancel{ak} + \cancel{ak^2} + \ldots + \cancel{ak^{n-1}} + ak^n$$

$$k s_n - s_n = ak^n - a$$

$$\Rightarrow \quad (k-1) s_n = a(k^n - 1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{s_n = a \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}}$$

Den geometriske række $\sum_{i=1}^{\infty} ak^{i-1}$

er konvergent hvis og kun hvis $|k| < 1$, og så er summen

$$\sum_{i=1}^{\infty} ak^{i-1} = \frac{a}{1-k}$$

Bevis: Det n'te led i afsnitsfølgen er (for $k \neq 1$)

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} ak^{i-1} = a \cdot \frac{k^n - 1}{k-1}$$

Når $|k|<1$: så vil $k^n \to 0$ når $n \to \infty$

Heraf fås: $s_n \to a\frac{-1}{k-1}$ når $n \to \infty$

$= \frac{a}{1-k}$

og derfor er

For $|k| \geq 1$ (og $k \neq 1$) er k^n ikke konv. s_n ikke konv.

$k=1$: behandles særskilt ... $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot 1^{i-1} = a + a + a + a + \ldots\right)$ $\square$

Rentetilskrivning (10.1-3)

Et beløb S_0 indsættes i banken til en årlig rente r.
Ved årlig rentetilskrivning er beløbet efter et år så vokset til:

$$S_0(1+r)$$

Hvis der tilskrives renter n gange om året (n årlige *terminer*)
er *terminsrenten* $\frac{r}{n}$ og det oprindelige beløb S_0
er så efter en termin blevet til:

$$S_0(1+\frac{r}{n})$$

Efter et år er beløbet blevet til:

$$S_0(1+\frac{r}{n})^n$$

Og efter t år er beløbet blevet til:

$$S_0(1+\frac{r}{n})^{nt}$$

Ved n årlige rentetilskrivninger er den *effektive årlige rente* R givet ved ((10.1.2), s. 377):

$$(1 + R) = (1 + \frac{r}{n})^n$$

Det kan vises (exercise 10.2.6, ektra udfordring til uge 44) at $(1 + \frac{r}{n})^n$ er voksende i n.

Derfor: Jo flere årlige rentetilskrivinger, jo højere effektiv rente!

Kontinuert rentetilskrivning

Beløb S_0 er efter et år med n rentetilskrivninger blevet til:

$$S_0(1+\tfrac{r}{n})^n$$

Hvad sker der i grænsen $n \to \infty$? (”kontinuert rentetilskrivning”)

Idet vi sætter $h = \frac{r}{n}$ får vi:

$$(1+\frac{r}{n})^n = (1+h)^{\frac{1}{h}\cdot r} = \left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^r$$

Når $n \to \infty$ vil $h \to 0$. Derfor:

Vigtig grænseværdi, se næste slide!

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{r}{n})^n = \left[\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^r = [e]^r = e^r$$

Beløb S_0 er efter et år med kontinuert rentetilskrivning altså blevet til:

$$S_0 e^r$$

Efter t år:

$$S_0(e^r)^t = S_0 e^{rt}$$

Kont. rentetilskr: Højeste eff. rente!

En vigtig grænseværdi:

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$