Matematik A E2019
Uge 43, Forelæsning 2

Afsnit (10.3 og) 10.5-8

"Emner i finansiel matematik": Nutidsværdi, annuiteter, annuitetslån, differensligninger mv.

Nutidsværdi/PDV (10.3)

Hvad er "nutidværdien" A af et beløb K til betaling om t år?

(ved årlig rente r og årlig rentetilskrivning)

Ved t årlige forrentninger skal A vokse til K:

$$A(1+r)^t = K$$

$$\downarrow$$

Altså:

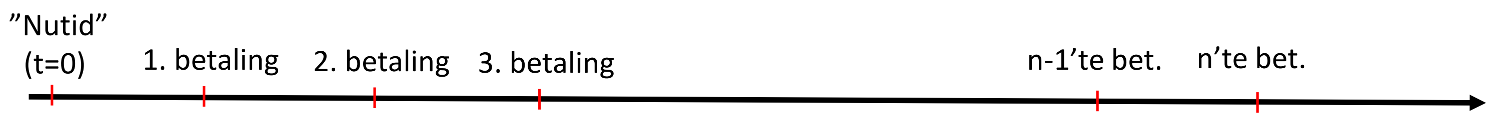
$$\boxed{A = K(1+r)^{-t}}$$

Ved kontinuert rentetilskrivning fås tilsvarende:

$$Ae^{rt} = K \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = Ke^{-rt}}$$

Annuiteter (10.5)

Annuitet: En række betalinger af et fast beløb med faste mellemrum over et givent tidsrum.



Betalinger:	a	a	a	a	a
Nutidsværdi:	$\frac{a}{1+r}$	$\frac{a}{(1+r)^2}$	$\frac{a}{(1+r)^3}$	$\frac{a}{(1+r)^{n-1}}$	$\frac{a}{(1+r)^n}$

Hvad er nutidsværdien/PDV af en sådan annuitet?

(ved rente r per periode (fx årlig) og rentetilskrivning hver periode)

$$P_n = \frac{a}{1+r} + \frac{a}{(1+r)^2} + \frac{a}{(1+r)^3} + \dots + \frac{a}{(1+r)^{n-1}} + \frac{a}{(1+r)^n}$$

$$P_n = \frac{a}{1+r}\underbrace{\left(1 + \left(\frac{1}{1+r}\right) + \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{1+r}\right)^{n-1}\right)}_{\text{Endelig geometrisk række!}}$$

Endelig geometrisk række!

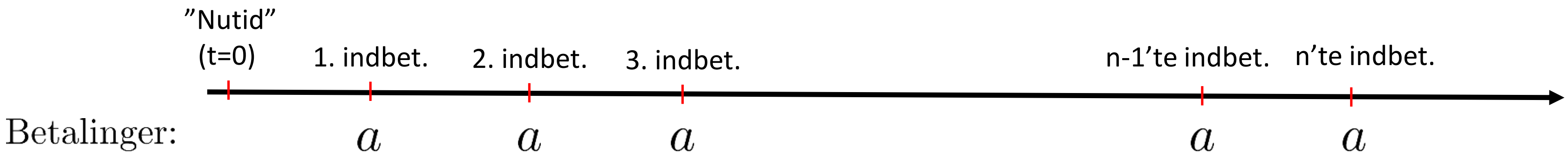
$$\left(k = \frac{1}{1+r}\right)$$

$$= \frac{a}{1+r}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)}\right) = a\left(\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{(1+r)-(1+r)\frac{1}{1+r}}\right) = a\left(\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{r}\right)$$

$$= \frac{a}{r}\left(1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right)$$

Nutidsværdien af annuiteten er altså ((10.5.2), s. 391):

$$\boxed{P_n = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)}$$



"Fremtidsværdien" F_n af annuiteten er værdien umiddelbart efter den sidste indbetaling

Kan fx udregnes nemt vha nutidsværdien ((10.5.3), s. 392):

$$\boxed{F_n = P_n(1+r)^n = \frac{a}{r}\Big(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\Big)(1+r)^n = \frac{a}{r}\big((1+r)^n - 1\big)}$$

Annuitetslån (10.6)

Annuitetslån: Der stiftes en gæld K, som tilbagebetales med faste beløb med faste mellemrum over et givent tidsrum.

	"Nutid" (t=0)	1. termin	2. termin	3. termin	n-1'te termin	n'te termin
Lån:	K					
Tilbagebetaling:		a	a	a	a	a

Hvad er sammenhængen mellem K, a, r og n?

1) $K = P_n$ (nutidsværdi af annuitet givet ved betalinger)

2) $K(1+r)^n = F_n$ (fremtidsværdi af annuitet givet ved betalinger)

(Brug formler for P_n eller F_n)

$$\boxed{K = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)}$$

Øvelse

$$K = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)$$

Gorm vil låne 10 mio. kr. til at købe et familie-slot. Han tager et annuitetslån med uendelig løbetid, som han selv og hans efterkommere skal betale af på i al fremtid. Terminerne er årlige og den årlige rente er 7%.

Hvor meget skal Gorm (og hans efterkommere) betale i årligt afdrag?

$a = K \cdot r = 700.000$ kr.

$\left(\frac{1}{(1+r)^n} \to 0 \text{ når } n \to \infty\right)$

Hvor meget større bliver de årlige afdrag, hvis lånet betales tilbage over 100 år?

$n = 100$, isolér a

pingo.coactum.de
(708646)

Forskel: $\approx 807{,}65$ kr.

Kort om investeringsprojekter (10.7)

Årligt nettoafkast af investeringsprojekt over $n+1$ år:

$$a_0,\, a_1,\, a_2,\, \ldots\, ,\, a_n$$

Ved rente r er nutidsværdien (net present value) af projektet:

$$A = a_0 + \tfrac{a_1}{1+r} + \tfrac{a_2}{(1+r)^2} + \ldots + \tfrac{a_n}{(1+r)^n} = \textstyle\sum_{i=0}^{n} \tfrac{a_i}{(1+r)^i}$$

Projekter kan sammenlignes ved at sammenligne nutidsværdi
(jo højere nutidsværdi, jo mere fordelagtigt projekt)

Alternativt kan projekter sammenlignes vha den indre rente r^*
(internal rate of return, IRR):

$$a_0 + \tfrac{a_1}{1+r^*} + \tfrac{a_2}{(1+r^*)^2} + \ldots + \tfrac{a_n}{(1+r^*)^n} = 0$$

Indre rente: Renten, der giver projektet nutidsværdi 0

Kontinuerte indkomststrømme (10.3, s. 393-4)

En kontinuert indkomststrøm fra $t = 0$ til $t = T$ er givet ved en funktion $f(t)$, der angiver tilvæksthastigheden i indkomst til tiden t (fx i dollar/år eller kroner/år).

I et lille tidsinterval fra t til $t + dt$ vokser indkomsten således (approx.) med

$$f(t) \cdot dt$$

Nutidsværdien af denne lille "indkomstbid" er (ved kont. rentetilskr.):

$$(f(t) \cdot dt)e^{-rt} = f(t)e^{-rt}dt$$

Ved at "summe" nutidsværdierne af alle de små "indkomstbidder" fra $t = 0$ til $t = T$ fås nutidsværdien af den samlede indkomststrøm:

$$\boxed{\text{PDV} = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt}$$

Fremtidsværdien findes tilsvarende - se bogen

Pelle Polardyr:

Differensligninger (10.8)

En bank tilbyder en Pelle Polardyr-børnekonto. Den årlige rente er 5%, og derudover indsætter banken hvert år en bonus på 100 kr på barnets fødselsdag (som ikke forrentes før det følgende år).

1) Antag en konto åbnes og et engangsbeløb indsættes.

Lad x_t betegne saldoen på kontoen efter t år. Opskriv udviklingen i x_t som en lineær differensligning af første orden (se (10.8.3), s. 402).

$$x_{t+1} = 1,05 \cdot x_t + 100$$

2) Poul på 9 år åbner en konto og indsætter 1000 kr.

Brug resultatet i (10.8.4), s. 403 til at udregne, hvor mange penge der står på kontoen 7 år senere.

$$x_t = a^t\left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.$$

$$x_7 = 2221,30 \text{ kr.}$$

1) Differensligning:

2) På Pouls konto står der efter 7 år (vha (10.8.4))

(Se forrige slide)

Resultatet i (10.8.4) udledes på følgende måde:

- Find et udtryk for x_t ved at se på x_0, x_1, x_2,…
- Brug formlen for summen af en endelig geometrisk række (fra 10.4, sidste forelæsning)

Sørg for selv at gå argumentet (og resten af afsnittet) igennem!