Matematik A E2019
Uge 44, Forelæsning 2

Afsnit 9.3(fortsat)-9.5

Integralregning:

Bestemte integraler (fortsat), partiel integration, økonomiske anvendelser

Egenskaber for best. integr. (9.3)

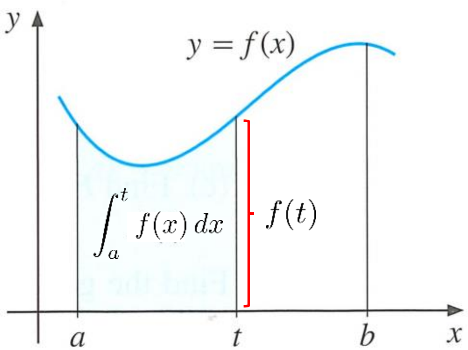
Husk definition:
($f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinuert med stamfunktion F)

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_a^b F(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Heraf fås, at der for $a < t < b$ gælder:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)\,dx = \frac{d}{dt}\big(F(t) - F(a)\big) = F'(t) - 0 = f(t)}$$

Grafisk for ikke-negativ f:



Generalisering ($a(t)$ og $b(t)$ er differentiable funktioner):

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x)\,dx = f(b(t))b'(t) - f(a(t))a'(t)}$$

Bevis: Kædereglen...

$$\int_{a(t)}^{b(t)} f(x)\,dx = F(b(t)) - F(a(t))$$

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x)\,dx = \frac{d}{dt}\Big(F(b(t)) - F(a(t))\Big) = b'(t)F'(b(t)) - a'(t)F'(a(t))$$

$$= f(b(t))\,b'(t) - f(a(t))\,a'(t).$$

Øvelse: Lad $g(t) = \int_0^t \underbrace{(x^2+2)}_{f(x)}dx$ og $h(t) = \int_0^{t^2}(x^2+2)dx$.

Bestem $g'(t)$ og $h'(t)$.

(kun $h'(t)$)

pingo.coactum.de

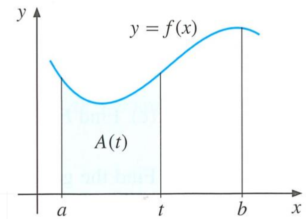
(708646)

$$g'(t) = t^2 + 2$$

$$h'(t) = f(t^2)\cdot 2t - f(0)\cdot 0 = \left((t^2)^2 + 2\right)\cdot 2t$$

$$= 2t^5 + 4t$$

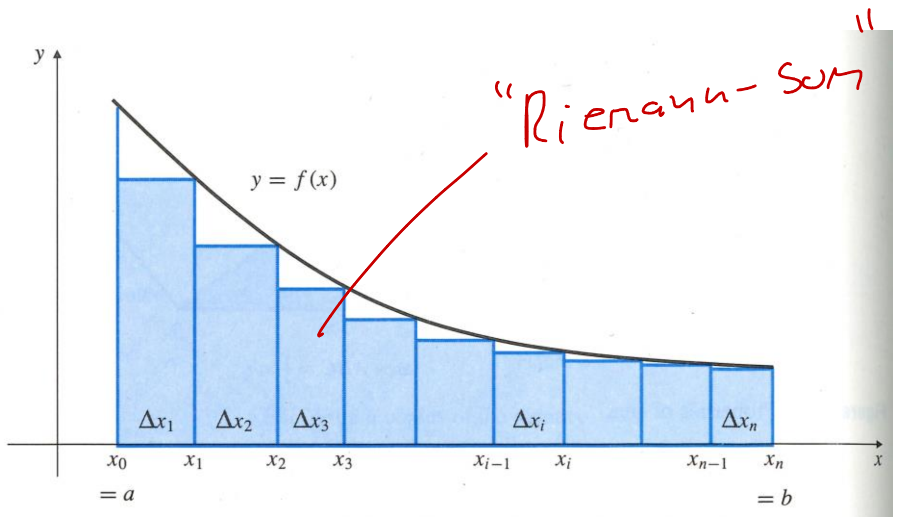
Har enhver kontinuert fkt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en stamfunktion F?
Og kan vi altid finde en forskrift for F?



1) Ja (brug arealfunktionen)

2) Nej (fx. $f(x) = e^{-x^2}$)

Kort om "Riemann-integralet":



$$\int_a^b f(x)\, dx$$

defineres som grænseværdien af "det blå areal" når $n \to \infty$ og $\max_{i=1,\dots,n} \Delta x_i \to 0$

Partiel integration (9.5)

Vigtig metode til at bestemme både bestemte og ubestemte integraler!

Vi starter med ubestemte integraler

Lad f og g være differentiable funktioner.
Vi differentierer $f(x)g(x)$ vha produktreglen:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Heraf fås...

$$\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx = f(x)g(x) + C$$

$$\int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) + C$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) + \cancel{C} - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Partiel integration, ubestemte integraler ((9.5.1), s. 344)

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

Eksempler

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

$$\int xe^{ax}\,dx = x\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right) - \int 1\cdot\frac{1}{a}e^{ax}\,dx$$

$(a \neq 0)$

$f(x) = x$

$g'(x) = e^{ax}$

$$= \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}\int e^{ax}\,dx$$

$$= \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right) + C$$

$$= \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax} + C$$

$$\int \ln(x)\,dx = \int \ln(x)\cdot 1\,dx$$

$f(x) = \ln(x)$

$g'(x) = 1$

$$= \ln(x)\,x - \int \frac{1}{x}x\,dx = \ln(x)\cdot x - \int 1\,dx$$

$$= x\ln(x) - x + C$$

$$\int x^2e^{-x}\,dx = x^2(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x})\,dx$$

$f(x) = x^2$

$g'(x) = e^{-x}$

$$= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx$$

[brug med $a = -1$]

$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$$

Bestemte integraler:

$$= \frac{3\ln(2)-1}{(\ln(2))^2}$$

Da $f(x)g(x)$ er stamfunktion til $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$:

$$\int_a^b \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right) dx = [f(x)g(x)]_a^b$$

Partiel integration, bestemte integraler ((9.5.2), s. 346)

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx}$$

Eksempel:

$$\int_0^1 (x+1)2^x\,dx = \left[(x+1)\frac{1}{\ln(2)}2^x\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot\frac{1}{\ln(2)}2^x\,dx$$

$f(x) = x+1$

$g'(x) = 2^x$

$$= \left[(x+1)\frac{1}{\ln(2)}2^x\right]_0^1 - \left[\frac{1}{(\ln(2))^2}2^x\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{\ln(2)}\cdot 2^1 - \frac{1}{\ln(2)}2^0\right) - \left(\frac{1}{(\ln(2))^2}2^1 - \frac{1}{(\ln(2))^2}2^0\right)$$

Øvelse:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

$$\int 6x(1+x)^5\,dx = x(1+x)^6 - \int 1\cdot(1+x)^6\,dx$$

pingo.coactum.de
(708646)

$f(x) = x$

$g'(x) = 6(1+x)^5$

$$= x(1+x)^6 - \frac{1}{7}(1+x)^7 + C$$

Ekstra:
(hvis tid)

$$\int_0^a x3^x\,dx = \left[x\cdot\frac{1}{\ln(3)}3^x\right]_0^a - \int_0^a 1\cdot\frac{1}{\ln(3)}3^x\,dx$$

$f(x) = x$

$g'(x) = 3^x$

$$= \left[x\frac{1}{\ln(3)}3^x\right]_0^a - \left[\frac{1}{(\ln(3))^2}3^x\right]_0^a = \left(\frac{a\cdot 3^a}{\ln(3)} - 0\right) - \left(\frac{3^a}{(\ln(3))^2} - \frac{1}{(\ln(3))^2}\right)$$

$$= \frac{a3^a}{\ln(3)} - \frac{3^a - 1}{(\ln(3))^2}$$

Indkomstfordeling og integraler (9.~~5~~ 4)

Betragt land (eller lign.) med n indbyggere (over en hvis alder)

Myndighederne indsamler data om årlige indkomster

Lad $F(r)$ være andelen af befolkningen, hvis indkomst er $\leq r$ (kr)

min- indk.

$F(r)$ er så voksende funktion på et interval $[r_0, r_1]$

max-indk.

$F(r)$ er som udgangspunkt ikke kontinuert, men kan approksimeres med pæn differentiabel fkt

Antag derfor:
$F(r)$ er differentiabel med kontinuert afledet $f(r) = F'(r)$

"Indkomst-fordelingsfunktion"

"Indkomst-tæthedsfunktion"

Andel af befolkning med indkomst mellem r og $r + \Delta r$ (Δr "lille"):

$$F(r + \Delta r) - F(r) \approx f(r) \cdot \Delta r$$

Lad $r_0 < a < b < r_1$. Andel af befolkning med indkomst mellem a og b:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(r)\, dr$$

Antallet af individer med indkomst mellem a og b er således:

$$\boxed{N = n \int_a^b f(r)\, dr}$$

Hvad er den samlede indkomst for disse individer?

Og hvad er deres gennemsnitlige indkomst?

Lad $M(r)$ betegne den samlede indkomst for alle med indkomst $\leq r$

For "lille" Δr har vi følgende approksimation:

antal individer med indk. ml. r og $r + \Delta r$ (approx.)

$$M(r+\Delta r) - M(r) \approx r \cdot (nf(r)\Delta r)$$

indk. for hver af disse individer (approx.)

og dermed

$$\frac{M(r+\Delta r) - M(r)}{\Delta r} \approx nrf(r)$$

Når vi lader $\Delta r \to 0$ fås endelig:

$$\boxed{M'(r) = nrf(r)}$$

Dvs. $M(r)$ er stamfkt. til fkt. $n \cdot r \cdot f(r)$.

Den samlede indkomst for alle med indk. mellem a og b bliver derfor:

$$\boxed{M = M(b) - M(a) = n \int_a^b r f(r)\, dr}$$

Den gennemsnitlige indkomst for alle med indk. mellem a og b:

$$\boxed{m = \frac{M}{N} = \frac{n\int_a^b r f(r)\,dr}{n\int_a^b f(r)\,dr} = \frac{\int_a^b r f(r)\,dr}{\int_a^b f(r)\,dr}}$$

Holdundervisning: Opgave hvor indkomst-fordelingen er en Pareto fordeling (exercise 9.4.2)

Også udregning af "samlet efterspørgsel" når en individuel efterspørgselsfunktion er givet. Formel for samlet efterspørgsel ((9.4.5), s. 340) udledes analogt til formlen for $M = M(b) - M(a)$.

Bemærk også: Opgaver om partiel integration kommer i uge 46

(for at udjævne mængden af opgaver)

Ekstra-opgave:

Bestem integralet (a er en konstant)

$$\int \frac{\ln(x^a)}{x}\,dx = \int \frac{a\ln(x)}{x}\,dx = a\underbrace{\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx} = \frac{a}{2}\left(\ln(x)\right)^2 + C$$

Udregning af $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$: (Se evt Ex. 9.5.2, s 345)

[Partiel] →

$$\int \ln(x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = \ln(x)\cdot\ln(x) - \int \frac{1}{x}\cdot\ln(x)\,dx$$

Heraf: $2\int \ln(x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = \left(\ln(x)\right)^2 + C$,

dvs. $$\underbrace{\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2 + C}$$