Matematik A E2019
Uge 45, Forelæsning 1

Afsnit 9.6-7

Integralregning:

Integration ved substitution, uegentlige integraler

Integration ved substitution (9.6)

Betragt det ubestemte integral

$$\int 3x^2(5+x^3)^7\,dx$$

Lad $g(x) = 5 + x^3$, så er $g'(x) = 3x^2$, så integralet kan skrives...

$\int g'(x)(g(x))^7\,dx = \int g'(x) f(g(x))\,dx$, hvor $f(u) = u^7$

$= F(g(x)) + C$, hvor $F(u)$ er en stamfkt til $f(u)$

$= \frac{1}{8}(g(x))^8 + C$ $\quad \left(= \frac{1}{8}u^8 + C,\right.$ hvor $\left. u = g(x)\right)$

$= \frac{1}{8}(5+x^3)^8 + C$

Integration ved substitution, ubestemte integraler ((9.6.1), s. 348)

Lad $g(x)$ være differentiabel med kontinuert $g'(x)$ og lad $f(u)$ være kontinuert med stamfunktion $F(u)$. Så gælder:

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)\,dx = \underbrace{F(g(x)) + C}_{F(u)+C} = \int f(u)\,du\,, \qquad \text{hvor } u = g(x)}$$

Integration ved substitution, bestemte integraler ((9.6.2), s. 348)

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du\,, \qquad \text{hvor } u = g(x)}$$

I praksis bruges oftest metoden beskrevet på s. 349!

Kortfattet:

$$du = \frac{du}{dx} \cdot dx$$

$$\int G(x)\,dx \xrightarrow[\;]{\substack{u = g(x) \\ du = g'(x)dx}} \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Lad os bruge den i nogle eksempler...

Forholdsvis simpelt:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln(u)+C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

$u = 1+x^2$

$du = 2x\,dx$

$[\frac{1}{2}du = x\,dx]$

Sværere (ex 9.6.5, s. 350):

$$\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}x^2\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int x^2\sqrt{u}\,du$$

$u = 1+x^2$

$du = 2x\,dx$

$[\frac{1}{2}x^2du = x^3dx]$

$x^2 = u-1$

$$= \frac{1}{2}\int (u-1)\sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{3/2}du - \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}u^{5/2}+C_1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}+C_2\right)$$

$$= \frac{1}{5}u^{5/2} - \frac{1}{3}u^{3/2} + C \qquad \left(C = \frac{1}{2}C_1 - \frac{1}{2}C_2\right)$$

$$= \frac{1}{5}(1+x^2)^{5/2} - \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C$$

Øvelser

pingo.coactum.de
(708646)

$2(e^2-e)$

1) Bestem $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ og $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ $= \left[2e^u\right]_{u=1}^{u=2} = 2e^2 - 2e$

$u = \sqrt{x}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$\hookrightarrow \int e^u \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int e^u\, 2\,du = 2\int e^u du$

$= 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$

$= \frac{5}{2}\ln(5) - 2$

2) Bestem $\displaystyle\int x\ln(1+x^2)\,dx$ (og evt $\displaystyle\int_0^2 x\ln(1+x^2)\,dx$)

$u = 1+x^2$

$du = 2x\,dx$

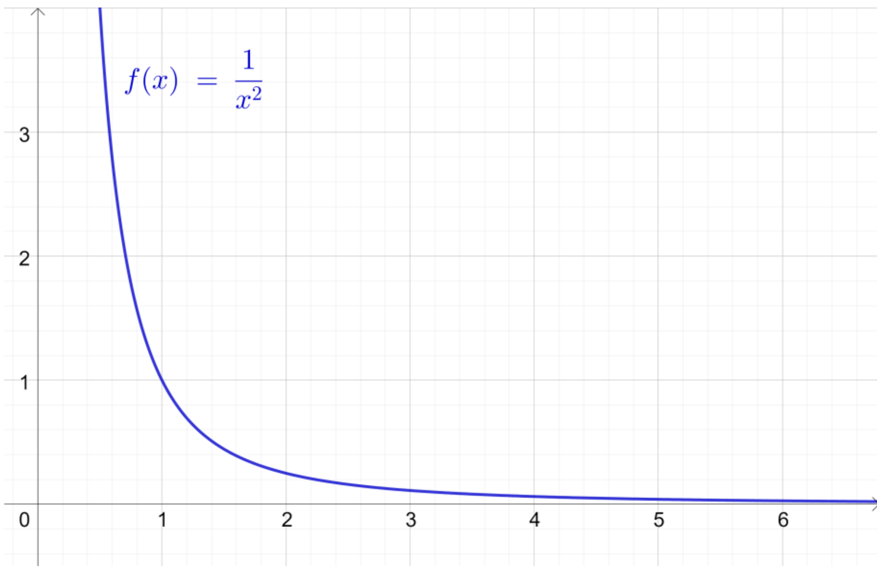
$\hookrightarrow = \int \frac{1}{2}\ln(u)du = \frac{1}{2}\int \ln(u)du = \frac{1}{2}\left(u\ln(u) - u\right) + C$

$= \frac{1}{2}\left((1+x^2)\ln(1+x^2) - (1+x^2)\right) + C$

$= \frac{1}{2}(1+x^2)\left(\ln(1+x^2) - 1\right) + C$

Uegentlige integraler (9.7)

"Improper integrals"

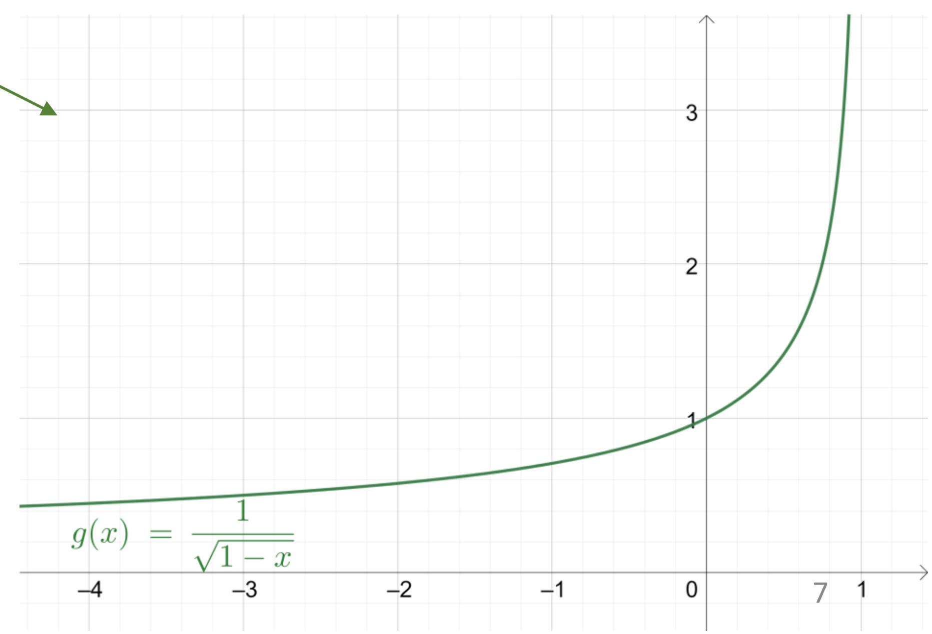


$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Hvis grænseværdien eksisterer!
Ellers siges integralet at *divergere*

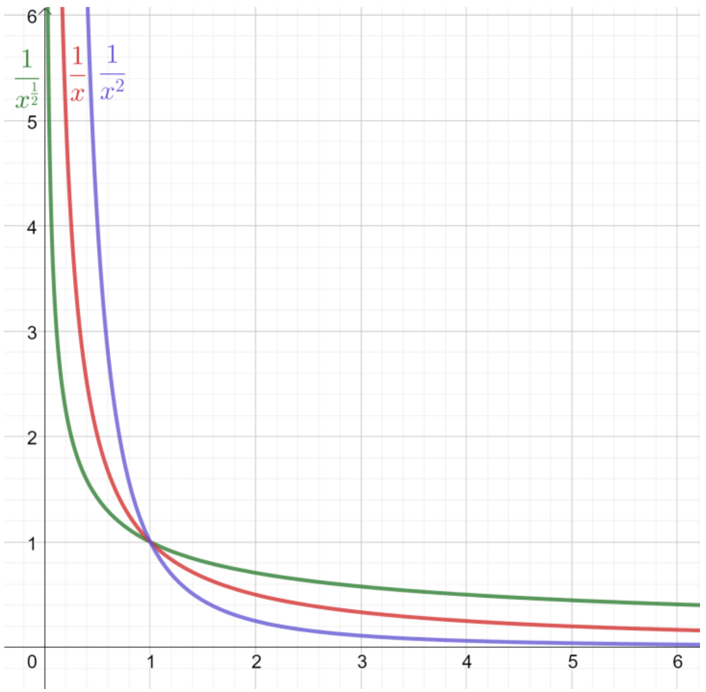
$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \lim_{h\to 0^+} \int_{-1}^{1-h} g(x)\,dx$$

Igen: Hvis grænseværdien eksisterer!



Vigtige eksempler (ex 9.7.2, s. 354)

$$f(x) = \frac{1}{x^a} = x^{-a} \text{ for } a > 0$$



$$\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \text{divergent} & \text{hvis } a \leq 1 \\ \frac{1}{a-1} & \text{hvis } a > 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & \text{hvis } a < 1 \\ \text{divergent} & \text{hvis } a \geq 1 \end{cases}$$

Brug at en stamfunktion til $f(x) = x^{-a}$ er:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{-a+1} x^{-a+1} & \text{hvis } a \neq 1 \\ \ln(x) & \text{hvis } a = 1 \end{cases}$$

For $a \neq 1$:

$$\int_1^b \frac{1}{x^a}\,dx = \int_1^b x^{-a}\,dx = \Big[\frac{1}{-a+1}x^{-a+1}\Big]_1^b = \left(\frac{1}{-a+1}b^{-a+1} - \frac{1}{-a+1}\right)$$

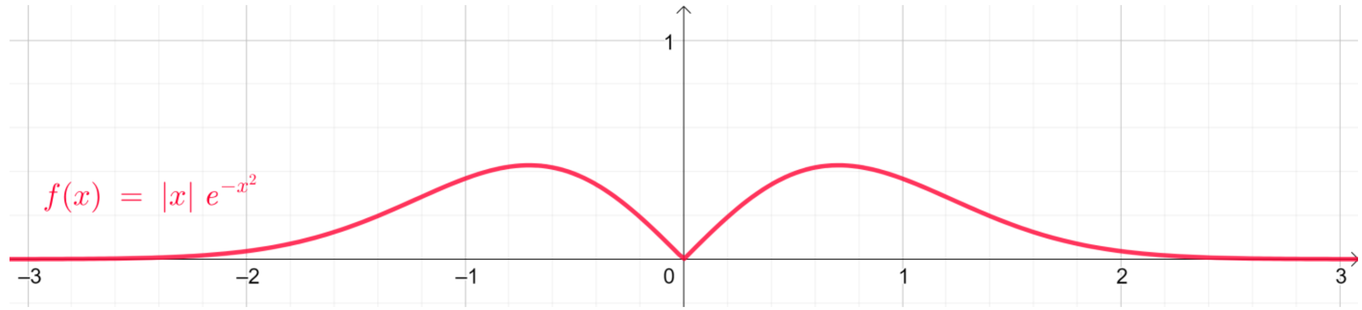
$$b^{-a+1} \begin{cases} \to 0 \text{ når } b \to \infty & \text{hvis } -a+1 < 0 \; (a>1) \\ \to \infty \text{ når } b \to \infty & \text{hvis } -a+1 > 0 \; (a<1) \end{cases}$$

Derfor:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \frac{-1}{-a+1} = \frac{1}{a-1} & \text{hvis } a>1 \\ \text{divergent} & \text{hvis } a<1 \end{cases}$$

Uegentlige integraler – ”to grænser”

$$f(x) = |x|e^{-x^2}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

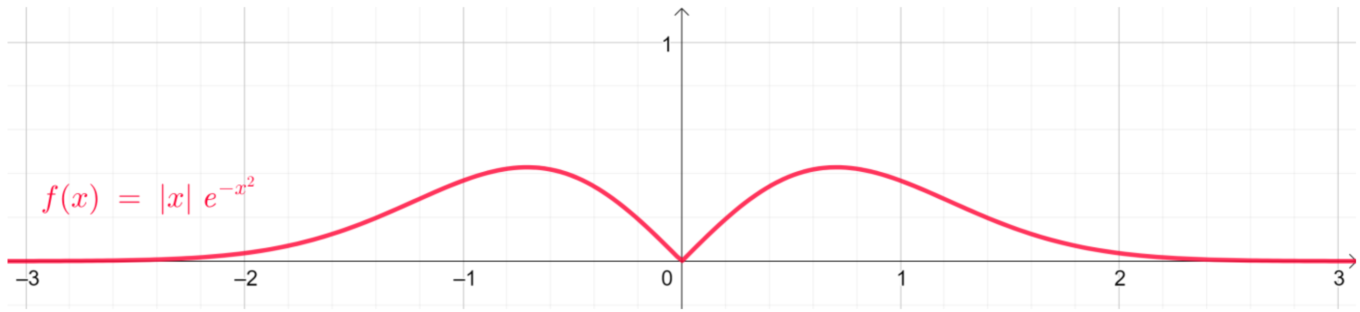
Igen: Hvis grænseværdierne eksisterer!

Bemærk: Valget af c er uden betydning (vælg fx c=0)

Øvelse: Vis det uegentlige integral $\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2}\,dx$ konvergerer og bestem værdien

$$= 2\int_0^{\infty} |x| e^{-x^2}\,dx$$

pingo.coactum.de (708646)



$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{\infty} |x|e^{-x^2}\,dx = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$\int_0^{b} x\,e^{-x^2}\,dx \underset{\substack{u=x^2\\ du=2x\,dx}}{=} \int_0^{b^2}\frac{1}{2}e^{-u}\,du = \frac{1}{2}\int_0^{b^2} e^{-u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-e^{-u}\Big]_0^{b^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-e^{-b^2}+e^{0}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$$

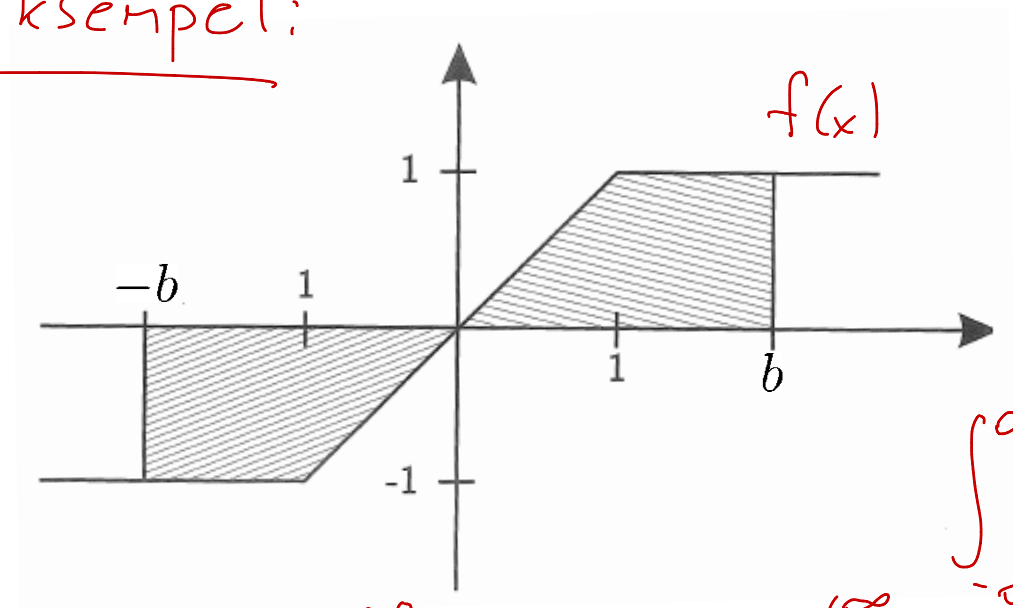
usir $b \to \infty$

Uegentlige integraler – ”to grænser”

Hvorfor er det vigtigt at ”dele op i to integraler”?

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx\end{aligned}$$

Eksempel:



$$\cancel{\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,dx} = 0$$

Men:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ divergerer, da både $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ og $\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ divergerer $\left(\begin{matrix}\text{mod} & \text{hhv.}\\ -\infty & \text{og } \infty\end{matrix}\right)$

En konvergens-test (Thm 9.7.1, s. 356)

Antag:

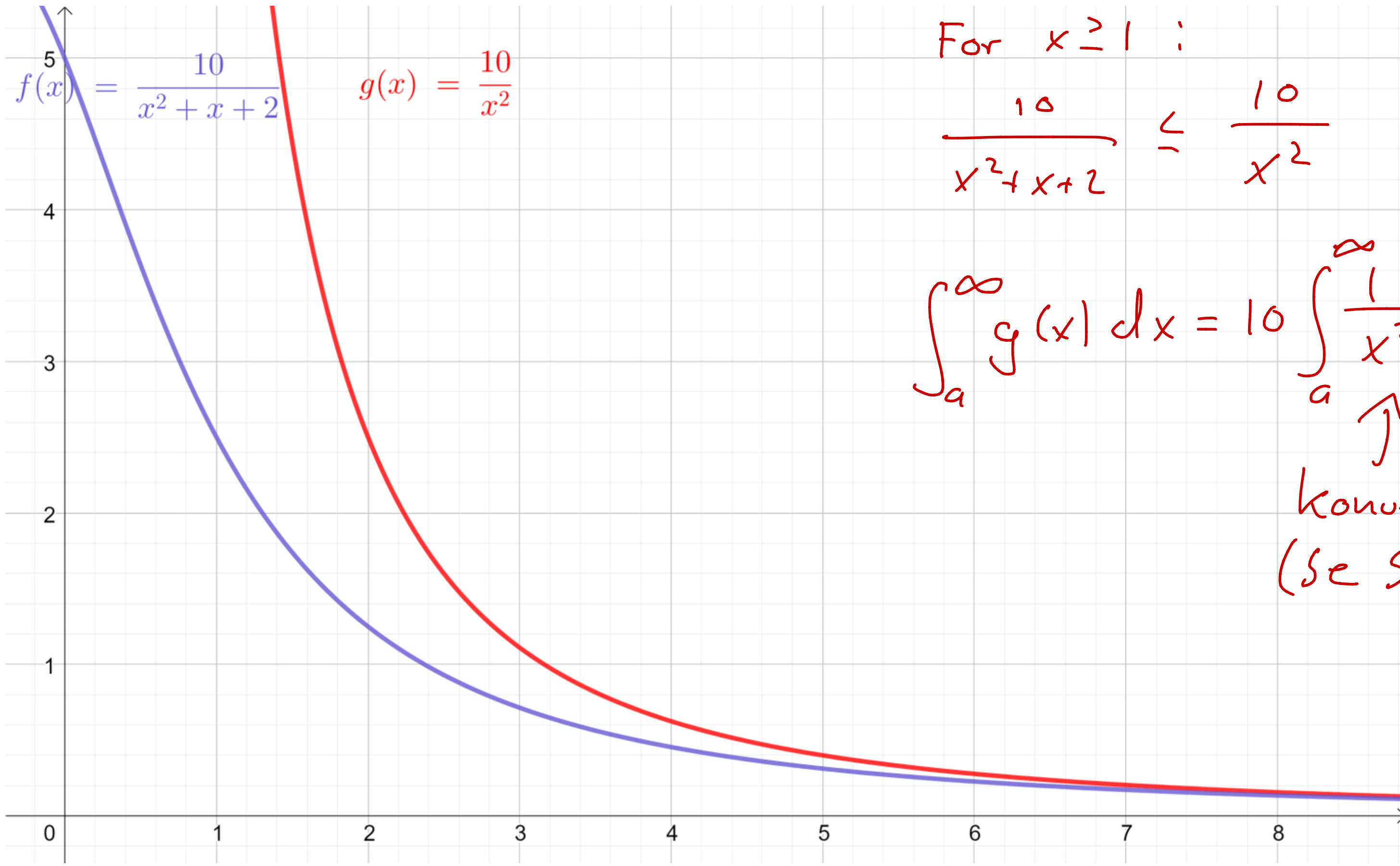
- $f(x)$ og $g(x)$ er kontinuerte på $[a, \infty)$
- $|f(x)| \leq g(x)$ for alle $x \geq a$
- Integralet $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergerer

Så konvergerer integralet $\int_a^\infty f(x)\,dx$ og

$$\left| \int_a^\infty f(x)\,dx \right| \leq \int_a^\infty g(x)\,dx$$

NB: Kan (i nogle tilfælde) hjælpe os med at afgøre om et uegentligt integral konvergerer, men ikke med at finde værdien (vi får kun en øvre grænse).

Eksempel: $f(x) = \frac{10}{x^2+x+2}$ og $g(x) = \frac{10}{x^2}$ på $[1, \infty)$



For $x \geq 1$:

$$\frac{10}{x^2+x+2} \leq \frac{10}{x^2}$$

$$\int_a^\infty g(x)\,dx = 10 \int_a^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

konvergerer.

(se slide 8)

Vi får: Integralet $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergerer og

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \leq \int_1^\infty \frac{10}{x^2}\,dx = 10 \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 10 \frac{1}{2-1} = 10$$