# Matematik A E2019
# Uge 46, Forelæsning 2

Afsnit 12.1-4

Funktioner af flere variable:

Kæderegler, implicit differentiation

# Lidt overblik

- Hængeparti fra sidst: Tangentplan (12.8)

- Kort om midtvejsevalueringen

- Kæderegler (12.1-2)
  - Differentiation af sammensat funktion, når der indgår fkt af flere variable

- Implicit differentiation - igen! (12.3-4)
  - Generel formel for differentialkvotienten af en implicit given funktion vha partielle afledede

# Kædereglen – simpel version (12.1)

Betragt en funktion $z = f(x, y)$ af de to variable $x$ og $y$

Antag at $x$ og $y$ begge afhænger af en variabel $t$:

$$x = g(t) \quad \text{og} \quad y = h(t)$$

Så har vi den sammensatte funktion

$$\boxed{z = F(t) = f(g(t), h(t))}$$

Hvordan kan vi bestemme differentialkvotienten $\frac{dz}{dt} = F'(t)$ ?

Hvis vi kender funktionerne $g$, $h$ og $f$, så kan vi finde et udtryk for $F(t)$, som så kan differentieres

Men det er ofte nyttigt med en generel formel for $\frac{dz}{dt} = F'(t)$

-> En "kæderegel"

For den sammensatte funktion $z = F(t) = f(g(t), h(t))$ gælder:

$$F'(t) = f_1'(g(t), h(t)) \cdot g'(t) + f_2'(g(t), h(t)) \cdot h'(t),$$

hvilket også kan skrives (husk $x = g(t)$ og $y = h(t)$)

$$\frac{dz}{dt} = f_1'(x, y)\frac{dx}{dt} + f_2'(x, y)\frac{dy}{dt} \qquad (12.1.1), \text{ s. } 444$$

Bemærk analogien til den velkendte kæderegel for fkt af én variabel!

pingo.coactum.de (708646)

Kort øvelse: Bestem $\frac{dz}{dt}$ når $z = xe^y$, hvor $x = t$ og $y = t^2$

Brug først kædereglen.

Check dernæst resultatet ved at udtrykke $z$ som fkt af $t$ og så differentiere

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = f_1'(x,y)\frac{dx}{dt} + f_2'(x,y)\frac{dy}{dt}}$$

Bestem $\frac{dz}{dt}$ når $z = \overbrace{xe^y}^{f(x,y)}$, hvor $x = t$ og $y = t^2$

Kædereglen:

$$\frac{dz}{dt} = e^y \cdot 1 + xe^y \cdot (2t)$$

$$= e^{t^2} + te^{t^2} \cdot 2t = \underline{(1+2t^2)e^{t^2}}$$

Check:

$$z = te^{t^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = 1 \cdot e^{t^2} + t \cdot (2t) \cdot e^{t^2} = \underline{(1+2t^2)e^{t^2}}$$

# Økonomisk eksempel (Example 12.1.4, s. 445)

Et samfunds "velstand" er en fkt af BNP $x$ og forureningsniveau $y$: $u(x, y)$

(realistisk at antage $u_1'(x, y) > 0$ og $u_2'(x, y) < 0$)

Forureningsniveau $y$ er fkt $y = h(x)$ af BNP (realistisk at antage $h'(x) > 0$)

Altså kan velstanden udtrykkes som fkt kun af BNP:

$$\boxed{U(x) = u(x, h(x))}$$

1) Brug kædereglen til at bestemme et udtryk for $U'(x)$

$$U'(x) = u_1'(x, h(x)) \cdot 1 + u_2'(x, h(x)) \cdot h'(x)$$

2) Find en nødvendig betingelse for, at $x^*$ er det optimale BNP

$$\underline{U'(x^*) = 0} = u_1'(x^*, h(x^*)) + u_2'(x^*, h(x^*)) \cdot h'(x^*)$$

$$\Rightarrow \underline{u_1'(x^*, h(x^*)) = -u_2'(x^*, h(x^*)) \cdot h'(x^*)}$$

# Kædereglen – mere generelt (12.2)

Betragt igen en funktion $z = f(x, y)$ af de to variable $x$ og $y$

Antag nu, at $x$ og $y$ begge afhænger af to variable: $t$ og $s$:

$$x = g(t, s) \quad \text{og} \quad y = h(t, s)$$

Kædereglen for den sammensatte funktion

$$z = F(t, s) = f(g(t, s), h(t, s))$$

er så:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f_1'(x, y)\frac{\partial x}{\partial t} + f_2'(x, y)\frac{\partial y}{\partial t}$$

og

$$\frac{\partial z}{\partial s} = f_1'(x, y)\frac{\partial x}{\partial s} + f_2'(x, y)\frac{\partial y}{\partial s}$$

(12.2.1-2), s. 449

Bemærk analogien til det simplere tilfælde fra tidligere!

Kan generaliseres til tilfælde, hvor $z$ er fkt af $n$ variable

$$z = f(x_1, \ldots, x_n)$$

og hvert $x_i$ er en fkt af $m$ variable

$$x_i = g_i(t_1, \ldots, t_m) \qquad (\text{for } i = 1, \ldots, n)$$

Så bliver kædereglen (med ren Leibniz-notation):

$$\frac{\partial z}{\partial t_j} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}$$

for $j = 1, \ldots, m$

(se (12.2.3), s. 450 for præcise antagelser om $f$ og $g_i$'erne)

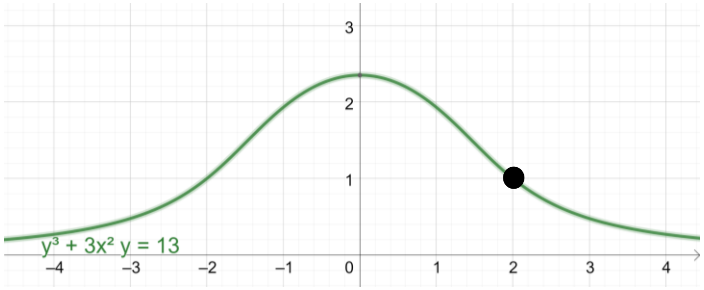
# Implicit differentiation - igen! (12.3)

Uge 41, 1 (ex 7.1.2, s. 223): $\boxed{y^3 + 3x^2 y = 13}$

Plot af løsninger $(x, y)$:

Funktion $y = f(x)$!

("implicit given funktion")




Vi fandt tangenthældn. $y'$ i $(2, 1)$ ved implicit diff.:

indsæt $x = 2$, $y = 1$

$$y' \cdot 3y^2 + 6x \cdot y + 3x^2 \cdot y' = 0 \xrightarrow[\text{isolér } y']{} y' = -\frac{2xy}{x^2+y^2} = -\frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{2^2+1^2} = -\frac{4}{5}$$

**Nu: Udled generel formel for $y'$ for implicit givne funktioner**

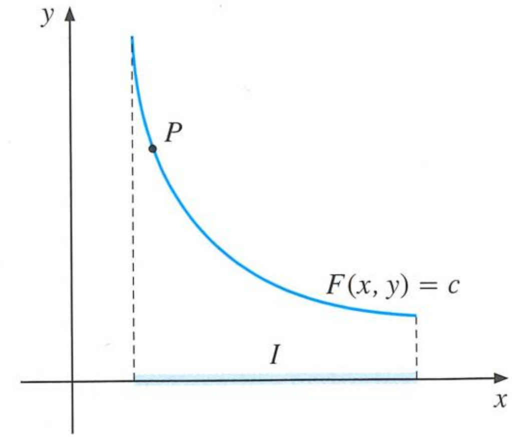
Bemærk, at kurven ovenfor er niveaukurve for $F(x, y) = y^3 + 3x^2 y$:

$$F(x, y) = 13$$

Derfor opfylder den implicit givne fkt $y = f(x)$:

$$F(x, f(x)) = 13$$

Generelt: Betragt niveaukurve for fkt $F(x, y)$




$$\boxed{F(x, y) = c}$$

Antag den definerer $y$ implicit som fkt $y = f(x)$ (omkring pkt P, dvs for $x$ i interval $I$)

For alle $x \in I$ gælder så: $\boxed{F(x, f(x)) = c}$

Differentiér funktionen $u(x) = F(x, f(x))$ vha kædereglen (simpel version!):

$$u'(x) = F_1'(x, f(x)) \cdot 1 + F_2'(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0$$

Heraf fås:

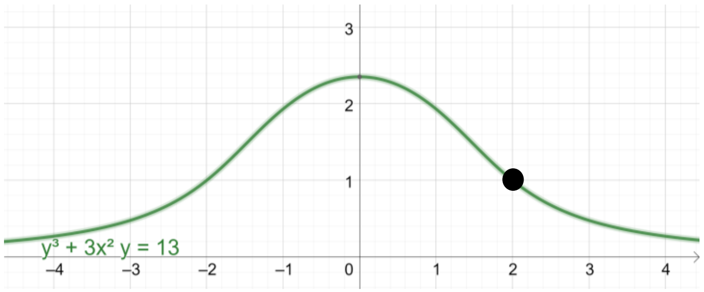
$$f'(x) = -\frac{F_1'(x, f(x))}{F_2'(x, f(x))}$$

Altså har vi følgende generelle formel for $y'$ for funktionen $y = f(x)$ givet implicit ved $F(x, y) = c$ ((12.2.3), s. 453):

$$y' = -\frac{F_1'(x, y)}{F_2'(x, y)} \qquad (\text{hvis } F_2'(x, y) \neq 0)$$

Tilbage til eksemplet fra uge 41:

$$\boxed{\underbrace{y^3 + 3x^2y}_{F(x,y)} = 13}$$




$$F_1'(x,y) = 3 \cdot 2x \cdot y = 6xy$$

$$F_2'(x,y) = 3y^2 + 3x^2 = 3(x^2+y^2)$$

Ved anvendelse af formlen får vi så:

$x=2, y=1$

$$y' = -\frac{F_1'(x,y)}{F_2'(x,y)} = -\frac{6xy}{3(x^2+y^2)} = -\frac{2xy}{x^2+y^2} = -\frac{2\cdot 2\cdot 1}{2^2+1^2} = -\frac{4}{5}$$

Samme resultat!
(som med den tidl. metode)

---

Bemærk: Vi kan også betragte $x$ som implicit given fkt af $y$.
Ved argumenter som på forrige slide ovenfor fås formlen:

$$x' = -\frac{F_2'(x,y)}{F_1'(x,y)} = \frac{1}{y'} \qquad (\text{hvis } F_1'(x,y) \neq 0)$$

# Kort om impl. givne fkt. af flere var. (12.4)

$$\boxed{F(x, y, z) = c} \longrightarrow$$

Implicit given fkt $z = f(x, y)$

Opfylder: $F(x, y, f(x, y)) = c$

Vha kædereglen kan man differentiere $g(x, y) = F(x, y, f(x, y))$ mht $x$ og $y$ og deraf få formler for $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ og $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$ ((12.4.1), s. 457):

$$\boxed{z'_x = -\frac{F'_x(x, y\cancel{)}, z)}{F'_z(x, y\cancel{)}, z)} \qquad \text{og} \qquad z'_y = -\frac{F'_y(x, y\cancel{)}, z)}{F'_z(x, y\cancel{)}, z)}}$$

Bemærk analogien til det tidligere resultat for implicit given fkt af én variabel!

Kan videre generaliseres til vilkårligt antal variable (se (12.4.2), s. 459)