# Matematik A E2019
# Uge 47, Forelæsning 1

Afsnit 11.8, 12.6-7
Funktioner af flere variable:
Partielle elasticiteter,
homogene og homotetiske funktioner

# Lidt overblik

- Partielle elasticiteter (11.8)
  - Generalisering af elasticitetsbegrebet til funktioner af flere variable

- Homogene og homotetiske funktioner (12.6-7)
  - Typer af funktioner, der ofte dukker op i økonomisk teori
  - Vi fokuserer mest på fkt af 2 variable, men generalisering til n variable er “lige ud ad landevejen”

- Fra næste forelæsning: Optimering/ekstremumsbestemmelse  for funktioner af flere variable

# Elasticitet, én variabel

(Afsnit 7.7, uge 41 forelæsning 2)

For en differentiabel funktion $f$ med $f(x) \neq 0$ er elasticiteten mht $x$ defineret ved:

$$\mathrm{El}_x f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x)$$

Husk fortolkning: Elasticiteten giver os (approximativt) den procentvise ændring i funktionsværdien ved en ændring på 1% i x-værdien

NB:

- Differentialkvotienter: Absolutte ændringer
- Elasticiteter: Relative ændringer!

# Partielle elasticiteter (11.8)

Lad $z = f(x, y)$ være funktion af to variable.
De partielle elasticiteter mht hhv $x$ og $y$ er (se (11.8.1), s. 437):

$$\boxed{\mathrm{El}_x\, z = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x} \qquad \text{og} \qquad \mathrm{El}_y\, z = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y}}$$

Alternativ notation:

$$\mathrm{El}_x\, f(x, y) = \frac{x}{f(x, y)} f_1'(x, y) \quad \text{og} \quad \mathrm{El}_y\, f(x, y) = \frac{y}{f(x, y)} f_2'(x, y)$$

Fortolkning som tidligere!
(Men husk at $y$ holdes fast, når vi finder $\mathrm{El}_x$ og omvendt)

Definitionen kan umiddelbart generaliseres til fkt af $n$ variable

Bevis: $\ln(z) = \ln(f(e^{\ln x}, e^{\ln y}))$

Brug kædereglen

Formler, der kan være nyttige:

$$\boxed{\mathrm{El}_x\, z = \frac{\partial \ln(z)}{\partial \ln(x)} \qquad \text{og} \qquad \mathrm{El}_y\, z = \frac{\partial \ln(z)}{\partial \ln(y)}}$$

NB: $x, y, z > 0$

(elasticiteter som (dobbelt-)logaritmiske afledede)

Eksempel: $z = f(x,y) = x^2 y^3 e^{x+y}$ (for $x, y > 0$)

$$\ln(z) = \ln(x^2) + \ln(y^3) + \ln(e^{x+y}) = 2\ln(x) + 3\ln(y) + x + y$$

$x = e^{\ln(x)}$, $y = e^{\ln(y)}$

$$\mathrm{El}_x\, z = \frac{\partial \ln(z)}{\partial \ln(x)} = 2 + e^{\ln(x)} = 2 + x$$

Prøv selv:

$$\mathrm{El}_y\, z = \frac{\partial \ln(z)}{\partial \ln(y)} = 3 + e^{\ln(y)} = 3 + y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2(3y^2)e^{x+y} + x^2y^3e^{x+y} = \underbrace{3x^2y^2e^{x+y} + x^2y^3e^{x+y}}$$

$$\mathrm{El}_y\, z = \frac{y}{x^2y^3e^{x+y}}\left( \quad \right) = 3 + y$$

## Økonomisk eksempel

Efterspørgselsfunktion (vare $i$) for forbruger: $D_i(m, p_i, p_j)$

Indkomstelasticitet: $\mathrm{El}_m\, D_i = \dfrac{m}{D_i}\dfrac{\partial D_i}{\partial m}$

Egen-priselasticitet: $\mathrm{El}_{p_i}\, D_i = \dfrac{p_i}{D_i}\dfrac{\partial D_i}{\partial p_i}$

Kryds-priselasticitet: $\mathrm{El}_{p_j}\, D_i = \dfrac{p_j}{D_i}\dfrac{\partial D_i}{\partial p_j}$

# Homogene fkt, 2 variable (12.6)

Lad $f(x, y)$ være funktion af to variable.

$f$ siges at være homogen af grad $k$, hvis:

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y) \qquad \text{for alle } (x, y) \in D \text{ og } t > 0$$

Eksempler: $\qquad f(x, y) = x + 2y + \sqrt{x^2 + y^2}$

$$F(L, K) = AL^a K^b \qquad (a, b > 0)$$

$$f(tx, ty) = tx + 2(ty) + \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} = tx + t(2y) + \sqrt{t^2(x^2 + y^2)}$$

$$= tx + t(2y) + t\sqrt{x^2 + y^2} = t\left(x + 2y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) = tf(x, y)$$

Homogen af grad $k = 1$.

$$F(tL, tK) = A(tL)^a (tK)^b = A t^a L^a t^b K^b = t^{a+b} A L^a K^b$$

$$= t^{a+b} F(L, K)$$

Homogen af grad $k = a + b$

**Eulers sætning (Thm 12.6.1, s. 464):**

$f(x,y)$ er homogen af grad $k$ hvis og kun hvis

$$xf_1'(x,y) + yf_2'(x,y) = kf(x,y) \quad \text{for alle } (x,y) \in D$$

Vi viser: Hvis $f$ homogen af grad $k$, så $xf_1'(x,y) + yf_2'(x,y) = kf(x,y)$

Lad $(x,y) \in D$. Da har vi for alle $t > 0$:

VS HS

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y)$$

Differentiér begge sider mht $t$:

VS: Kædereget ("simpel version")

$$f_1'(tx,ty)\cdot x + f_2'(tx,ty)\cdot y$$

HS: $k t^{k-1} f(x,y)$

For $t=1$:

$$f_1'(x,y)\cdot x + f_2'(x,y)\cdot y = k\cdot f(x,y)$$

NB: Se også egensk. for homogen fkt i (12.6.3-5), s. 464-5

Især:
$f_i'(x,y)$ homogen af grad $k-1$

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y)$$

$$xf_1'(x,y) + yf_2'(x,y) = kf(x,y)$$

Øvelser:

1) Vis, at nedenstående fkt er homogen, og bestem homogenitetsgraden $k$

(en del af opgave 1, spm 2 fra eksamen juni 2019)

pingo.coactum.de (708646)

$$f(x,y) = \frac{2x\sqrt{y} - 3y\sqrt{x}}{x^2+2y^2} \qquad (\text{hvor } x,y>0)$$

$$f(tx,ty) = \frac{t^{3/2}(2x\sqrt{y} - 3y\sqrt{x})}{t^2(x^2+2y^2)} = t^{-\frac{1}{2}} f(x,y)$$

Homogen af grad $k = -\frac{1}{2}$.

2) (Hvis tid!) Verificér, at ligningen i Eulers sætning gælder for

$$f(x,y) = x + 2y + \sqrt{x^2+y^2}$$

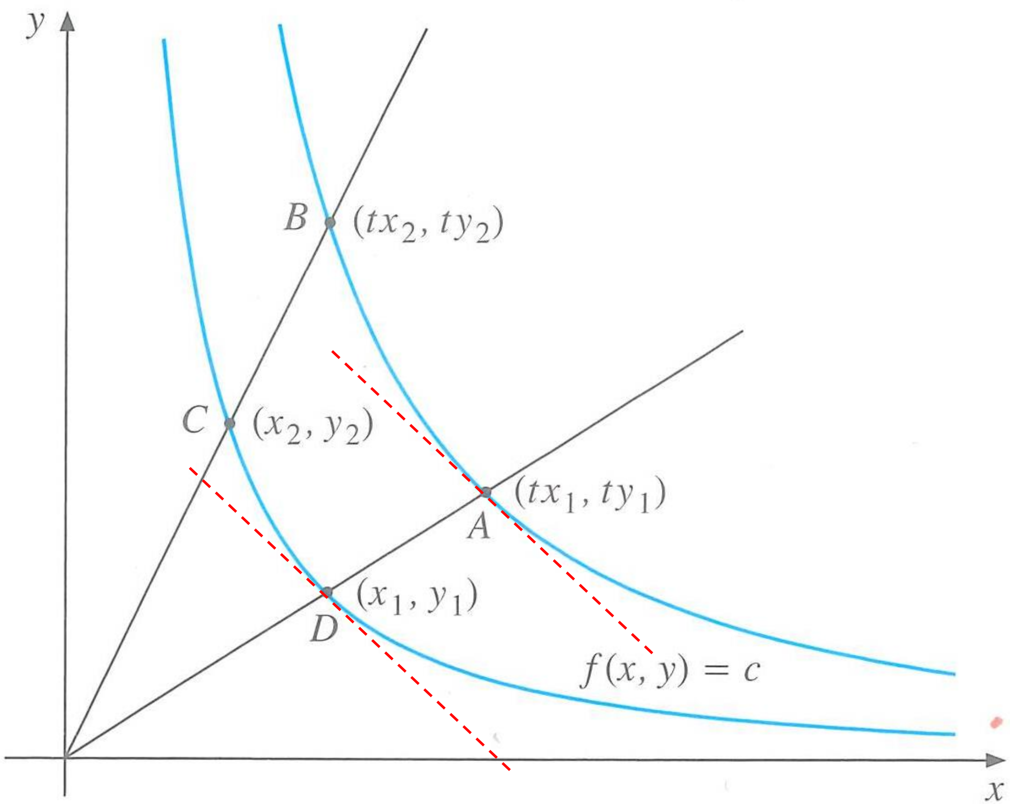
(homog. af grad 1)

$$xf_1'(x,y) = x\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right) = x + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$yf_2'(x,y) = y\left(2 + \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 2y + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$xf_1'(x,y) + yf_2'(x,y) = x + 2y + \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = x + 2y + \sqrt{x^2+y^2} = f(x,y) \quad ✓$$

# Homogene funktioner og niveau-kurver (s. 466-7)




$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow f(tx_1, ty_1) = t^k f(x_1, y_1) = t^k f(x_2, y_2) = f(tx_2, ty_2)$$

Hældning på niveau-kurver er den samme langs halvlinie fra $(0, 0)$

# Homog. og homotetiske fkt (12.7)

Definition af homogene fkt kan umiddelbart udvides til $n$ variable:

$$\boxed{f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{for alle } (x_1, \ldots, x_n) \in D \text{ og } t > 0}$$

Teknisk detalje:

Definitionsmængden for en homogen funktion skal være en *kegle*

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ er en *kegle* hvis

$$(x_1, \ldots, x_n) \in D \quad \Rightarrow \quad (tx_1, \ldots, tx_n) \in D \quad \text{for alle } t > 0$$

Eulers sætning, $n$ variable (Thm 12.7.1, s. 469):

$f(x_1, \ldots, x_n) = f(\mathbf{x})$ er homogen af grad $k$ hvis og kun hvis

$$x_1 f_1'(\mathbf{x}) + \ldots + x_n f_n'(\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x}) \qquad \text{for alle } \mathbf{x} \in D$$

# Homotetiske funktioner

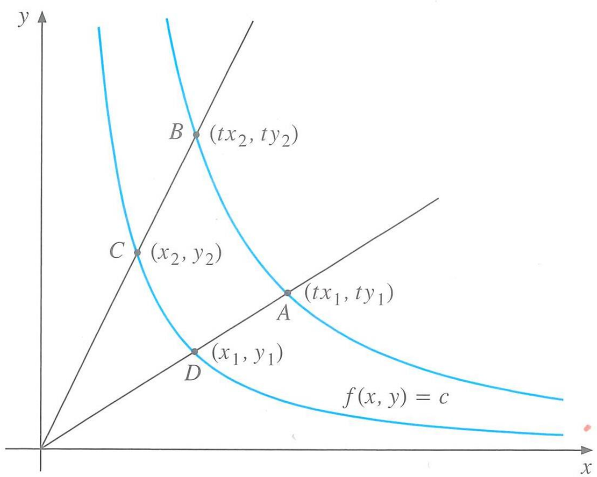
NB: Vi fokuserer på fkt af 2 variable, men alt kan generaliseres til $n$ variable

Lad $f(x, y)$ være fkt defineret på kegle $K \subseteq \mathbb{R}^2$

$f$ siges at være *homotetisk* hvis (for alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K$):

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \quad \Rightarrow \quad f(tx_1, ty_1) = f(tx_2, ty_2) \ \text{ for alle } t > 0$$

Grafisk:




Hvis $f$ er homogen, så er $f$ homotetisk

**Sætning (Thm 12.7.2, s. 472):**

Lad $f(x, y)$ være en homogen fkt (af vilkårlig grad $k$).
Lad $H(z)$ være en strengt voksende fkt af én variabel.
Så er den sammensatte funktion $F(x, y) = H(f(x, y))$ homotetisk.

Eksempel: $F(x, y) = xy + 1$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ er homotetisk, men ikke homogen

Homotetisk:

$f(x,y) = xy$ homogen af grad 2

$H(z) = z + 1$ strengt voksende

$F(x,y) = H(f(x,y)) = xy + 1$

Sætningen giver: $F(x,y)$ er homotetisk.