# Matematik A E2019
# Uge 49, Forelæsning 1

Afsnit 14.1-4

Funktioner af flere variable:

Optimering med bibetingelser,

"Lagrange-metoden"

# Lidt overblik

- Denne uge: **Optimering med bibetingelser!**

  En ekstrem vigtig type af optimeringsproblemer i økonomi, idet der i de fleste økonomiske modeller indgår forskellige økonomiske aktører, som antages at optimere givet deres muligheder/begrænsninger (fx forbruger med budgetbetingelse, virksomhed med teknologiske begrænsninger,…)

- **Lagrange-metoden** til løsning af optimeringsproblemer med bibetingelser
  - Primær fokus: Anvendelse af metoden på problemer med 2 variable, 1 bibetingelse (givet ved ligning).
  - + en smule om teoretisk baggrund og generalisering

- Næste uge: Opsamling og eksamensforberedelse, bl.a. nogle tidl. eksamensopgaver

# “Lagrange-metoden” (14.1)

**Eksempler på optimering med bibet. i økonomi:**

- Nyttemaksimeringsproblem for forbruger

$$\boxed{\max_{x,y} \; u(x,y) \quad \text{under bibet.} \quad px + qy = m}$$

- Omkostningsminimeringsproblem for virksomhed
  - Ønsker at producere outputmængde y billigst muligt
  - Eneste inputs er arbejdskraft (L) og kapital (K)
  - Produktionsfunktion F(L,K)
  - w er pris på arbejdskraft, r er (leje)pris på kapital

$$\boxed{\min_{L,K} \; wL + rK \quad \text{under bibet.} \quad F(L,K) = y}$$

Generelt optimeringsproblem (2 var) med én bibet.:

$$\boxed{\max_{x,y}\,(\min_{x,y})\; f(x,y) \quad \text{under bibet.} \quad g(x,y)=c}$$

"Find ekstremumspunkter for $f(x,y)$ givet bibetingelsen $g(x,y)=c$ "

- Løsningsmetode, der virker i mange tilfælde:
  - Brug bibetingelsen til at isolere y og dermed udtrykke y som funktion af x (eller udtryk x som funktion af y)
  - Indsæt dette på y's plads i $f(x,y)$
  - Så har vi ekstremumsproblem med kun én variabel

Med denne metode har vi tidl. løst nyttemax-problemet:

$$\boxed{\max_{x,y>0}\; \frac{1}{3}\ln(x)+\frac{2}{3}\ln(y) \quad \text{u.b.} \quad px+qy=m}$$

$$\boxed{\max_{x,y>0} \ \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y) \quad \text{u.b.} \quad px + qy = m}$$

# Nu løsn. vha ny metode: **Lagrange-metoden!** (s. 535)

(i) Opstil *Lagrange-funktionen* $\mathcal{L}(x,y)$ med *Lagrange-multiplikatoren* $\lambda$

$$\mathcal{L}(x,y) = \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y) - \lambda(px + qy - m)$$

(ii) Differentiér $\mathcal{L}(x,y)$ mht $x$ og $y$

$$\mathcal{L}_1'(x,y) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} - \lambda p$$

$$\mathcal{L}_2'(x,y) = \frac{2}{3}\frac{1}{y} - \lambda q$$

(iii) Opstil de tre *førsteordens-betingelser* (nødv. bet. for løsning!)

$$\mathcal{L}_1'(x,y) = \frac{1}{3}\frac{1}{x} - \lambda p = 0$$

$$\mathcal{L}_2'(x,y) = \frac{2}{3}\frac{1}{y} - \lambda q = 0$$

+ bibetingelsen: $px + qy = m$

(iv) Løs de tre ligninger for de ubekendte $x$, $y$ og $\lambda$

De tre førsteordensbetingelser:

$$\boxed{\frac{1}{3}\frac{1}{x} - \lambda p = 0 \qquad \frac{2}{3}\frac{1}{y} - \lambda q = 0 \qquad px + qy = m}$$

$\frac{1}{3}\frac{1}{x} = \lambda p$ $\qquad$ $\frac{2}{3}\frac{1}{y} = \lambda q$

$\lambda \neq 0$. Derfor

$$\frac{\frac{2}{3}\frac{1}{y}}{\frac{1}{3}\frac{1}{x}} = \frac{\lambda q}{\lambda p} \Rightarrow 2\frac{x}{y} = \frac{q}{p} \Rightarrow \underline{x = \frac{1}{2}\frac{q}{p}y}$$

Sæt ind i bibet:

$$p\left(\frac{1}{2}\frac{q}{p}y\right) + qy = m \Rightarrow \frac{1}{2}qy + qy = m \Rightarrow \frac{3}{2}qy = m$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}\frac{m}{q}}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\frac{q}{p}\left(\frac{2}{3}\frac{m}{q}\right) = \frac{1}{3}\frac{m}{p}} \qquad \boxed{\lambda = \frac{1}{3xp} = \frac{1}{m}}$$

**Lagrangemetoden er ofte en god metode til løsning af optimeringsproblemer med bibetingelser!**

$$\boxed{\max_{x,y} \left(\min_{x,y}\right) f(x,y) \quad \text{under bibet.} \quad g(x,y) = c}$$

- Og den type af problemer støder vi ofte på i økonomi!

(NB: Metoden kan generaliseres til flere var. og flere bibet.)

For det generelle problem er Lagrange-funktionen:

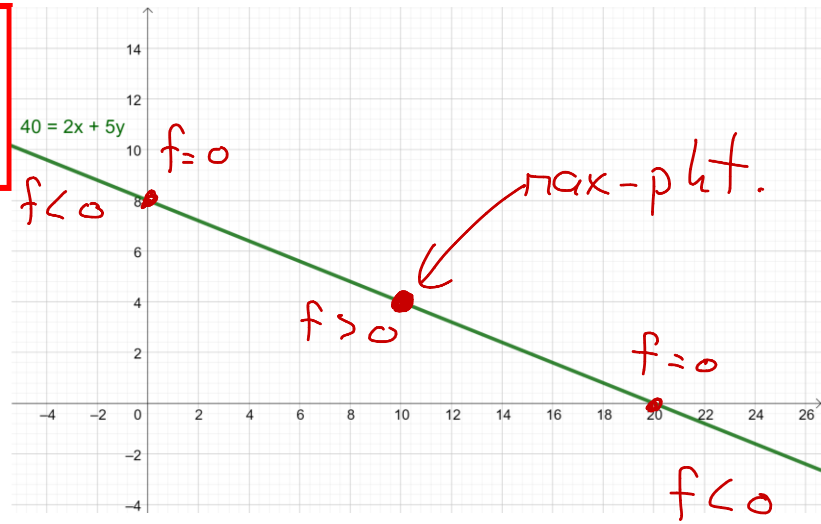
$$\boxed{\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)}$$

**Nu: Prøv selv at bruge Lagrangemetoden!**

Brug beskrivelse af metoden fra eksemplet fra før eller se s. 535 i bogen

# Øvelse: Løs vha Lagrange-metoden

$$\boxed{\max_{x,y} \; xy \quad \text{u.b.} \quad 2x + 5y = 40}$$




- Opstil Lagrangefunktionen

$\mathcal{L}(x,y) = xy - \lambda(2x + 5y - 40)$

- Find den eneste mulige løsning til problemet vha førsteordensbet. ← (pingo.coactum.de, ~~322628~~)

708646

$\underline{x = 10, \; y = 4}$

- Prøv at argumentere for, at problemet har en løsning (som så altså må være den fundne mulige løsning)

Ekstremværdisætn: f har max-pkt på liniestykket fra (0,8) til (20,0).
Dette må være max-pkt for f på hele linien. (se figur)

$$\boxed{\max_{x,y}\ xy \quad \text{u.b.} \quad 2x + 5y = 40}$$

$$\mathcal{L}(x,y) = xy - \lambda(2x + 5y - 40)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_1'(x,y) &= y - 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2\lambda \\ \mathcal{L}_2'(x,y) &= x - 5\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5\lambda \end{aligned}\right\} \quad \underline{y = 2\left(\frac{x}{5}\right) = \frac{2}{5}x}$$

Sæt ind i bibet:

$$2x + 5\left(\frac{2}{5}x\right) = 40 \quad \Rightarrow \quad 4x = 40 \quad \Rightarrow \quad \underline{x = 10}$$

$$\underline{y = \frac{2}{5}\cdot 10 = 4} \qquad \left(\lambda = \frac{y}{2} = 2\right)$$

Eneste løsning til førsteordensbet.

# Værdifkt og Lagrangemultiplikatoren (14.2)

$$\boxed{\max_{x,y}\,(\min_{x,y})\; f(x,y) \quad \text{u.b.} \quad g(x,y) = c}$$

- Løsning til problemet:

$$(x^*(c), y^*(c))$$

- Værdifunktion (ekstremumsværdi som fkt af c):

$$f^*(c) = f(x^*(c), y^*(c))$$

- Hvordan afhænger værdifunktion af c? [(14.2.2), s. 540]

$$\frac{df^*(c)}{dc} = \lambda(c)$$

Den værdi af $\lambda$, der sammen med $x^*(c)$ og $y^*(c)$ løser førsteordensbet.

  - Lagrangemultiplikatoren giver vigtig info!

# Eksempler: Nyttemax. og Omkostningsmin.

$$\boxed{\max_{x,y>0} \; \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y) \quad \text{u.b.} \quad px + qy = m}$$

Løsn. fra tidl: $x^*(m) = \frac{1}{3}\frac{m}{p}, \quad y^*(m) = \frac{2}{3}\frac{m}{q} \quad$ og $\quad \lambda(m) = \frac{1}{m}$

Værdifkt: $u^*(m) = u(x^*(m), y^*(m))$

Vi får så (approximativt): Ved en indkomst på $m$ kr. vil 1 kr. ekstra øge forbrugerens nytte med $\lambda(m) = \frac{1}{m}$

$$\boxed{\min_{L,K} \; wL + rK \quad \text{under bibet.} \quad F(L,K) = y}$$

Antag vi har fundet løsn. vha Lagrange: $L^*(y), \quad K^*(y) \quad$ og $\quad \lambda(y)$

$\lambda(y)$ fortæller os (approx.), hvor meget omkostningen vil stige, hvis virksomheden skal øge sit output med en enhed (fra $y$ til $y+1$)

# “Flere løsningskandidater” (14.3)

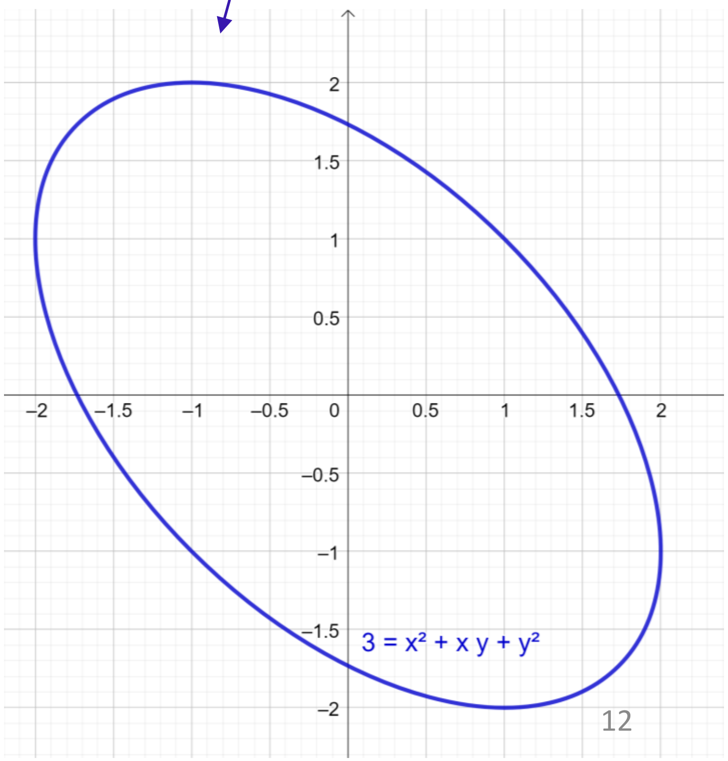
**Betragt problemerne:**

$$\boxed{\max_{x,y} \left(\min_{x,y}\right) x^2 + y^2 \quad \text{u.b.} \quad x^2 + xy + y^2 = 3}$$

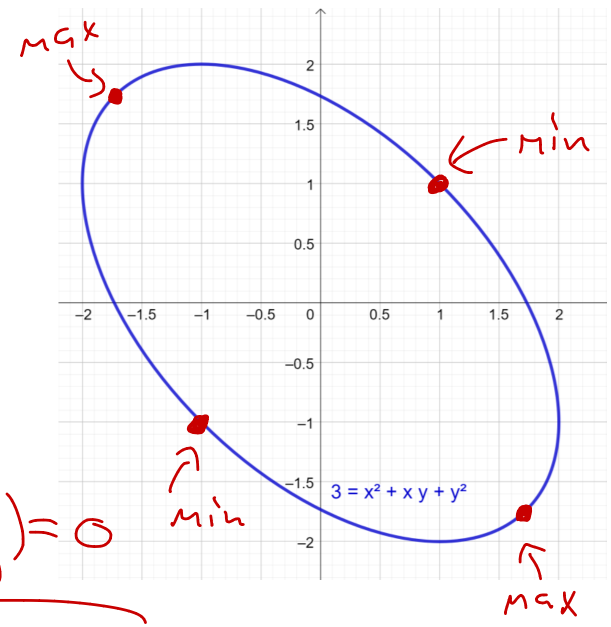
**Bemærk:**
Her kan vi ikke isolere y (eller x) i bibetingelsen

-> Vi er tvunget til at bruge **Lagrange-metoden**

Løsninger eksisterer!
(Ekstremværdisætningen)



$$\boxed{\max_{x,y}\,(\min_{x,y})\ x^2+y^2 \quad \text{u.b.} \quad x^2+xy+y^2=3}$$




$\mathcal{L}(x,y) = x^2+y^2-\lambda(x^2+xy+y^2-3)$

$\mathcal{L}_1'(x,y) = 2x-\lambda(2x+y) = 0$

$\mathcal{L}_2'(x,y) = 2y-\lambda(x+2y) = 0$

Træk nederste fra øverste:

$2(x-y)-\lambda(x-y) = 0 \Rightarrow \underline{(2-\lambda)(x-y)=0}$

Nulreglen: (2) $\lambda = 2$ eller (1) $x = y$

(1) Sæt ind i bibetingelsen: $x^2+x^2+x^2=3 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow \underline{x^2=1}$

Altså $x=\pm 1$, dvs. følgende løsn:

$\underline{(x,y)=(1,1)}$ og $\underline{(x,y)=(-1,-1)}$

$$\boxed{\max_{x,y}\,(\min_{x,y})\; x^2+y^2 \quad \text{u.b.} \quad x^2+xy+y^2=3}$$

② $\lambda = 2$.

Sett inn i $\mathcal{L}_1'(x,y)=0$: $\quad -2x-2y=0 \quad \Rightarrow x=-y$

Sett inn i b.bet.:

$$x^2 - x^2 + x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{x^2=3}$$

Altså $x=\pm\sqrt{3}$, dvs. følg. løsn.:

$$\underline{(x,y)=(\sqrt{3},-\sqrt{3})} \quad \text{og} \quad \underline{(x,y)=(-\sqrt{3},\sqrt{3})}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,1)=f(-1,-1)=2 \\ f(\sqrt{3},-\sqrt{3})=f(-\sqrt{3},\sqrt{3})=6 \end{array}\right\}$$

Herav: $\underline{\text{min-pkt: } (1,1) \text{ og } (-1,-1)}$

$\underline{\text{max-pkt: } (\sqrt{3},-\sqrt{3}) \text{ og } (-\sqrt{3},\sqrt{3})}$

# Lidt om teorien bag Lagrange-met. (14.4)

$$\max_{x,y} \left(\min_{x,y}\right) f(x,y) \quad \text{under bibet.} \quad g(x,y) = c$$

**Lagrange's sætning** (Theorem 14.4.1, s. 547)

Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og lad $f, g$ være $C^1$-funktioner på $A$

Lad $(x_0, y_0)$ være et indre pkt i $A$ og et lokalt ekstremumspunkt for $f(x,y)$ under bibetingelsen $g(x,y) = c$

Antag $g_1'(x_0, y_0)$ og $g_2'(x_0, y_0)$ ikke begge er lig 0

Da findes entydigt tal $\lambda$, så $(x_0, y_0)$ opfylder førsteordensbetingelserne:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1'(x,y) &= f_1(x,y) - \lambda g_1'(x,y) = 0 \quad \text{og} \\ \mathcal{L}_2'(x,y) &= f_2(x,y) - \lambda g_2'(x,y) = 0 \end{aligned}$$

# Kort bevis-skitse (se "An Analytic Argument", s. 546):

Antag det betingede ekstr.-pkt opfylder $g_2'(x_0, y_0) \neq 0$

Så definerer $g(x, y) = c$ implicit funktion $y(x)$ i omegn af $(x_0, y_0)$

Betragt så flg funktion af én variabel:

$$h(x) = f(x, y(x))$$

$x_0$ er ekstremumspunkt for $h$

(da $(x_0, y_0)$ er ekstremumspunkt for $f(x, y)$
under bibetingelsen $g(x, y) = c$)

Derfor må vi have:

$$h'(x_0) = 0$$

Vha kædereregel og implicit differentiation følger
de ønskede førsteordensbetingelser af denne betingelse