Matematik A E2019
Uge 48, Forelæsning 2

Eksempler på optimeringsproblemer

Lidt overblik

- Hængeparti: Især “strengt voksende transformationer”
- Eksempler på optimeringsproblemer!
  - En model af et duopol (exercise 13.4.5 fra bogen)
  - En tidligere eksamensopgave (juni 2019, opg. 2)
  - Ekstra (hvis tid eller til de hurtige): Opgave om produktionsfunktion og profitmaksimering fra eksamen i Mikroøkonomi 1, dec. 2016, opgave 3
  - Løsninger til opgaverne kan findes på Absalon sammen med slides (de er fra hhv. Student Manual og rettevejledninger)
- Næste uge: Optim. med bibet./Lagrangemetoden (kap 14)

Exercise 13.4.5 (s. 516)

SM **5.** *(Duopoly)* Each of two firms A and B produces its own brand of a commodity such as mineral water in amounts denoted by x and y, which are sold at prices p and q per unit, respectively. Each firm determines its own price and produces exactly as much as is demanded. The demands for the two brands are given by

$$x = 29 - 5p + 4q \quad \text{and} \quad y = 16 + 4p - 6q$$

Firm A has total costs $5 + x$, whereas firm B has total costs $3 + 2y$. (Assume that the functions to be maximized have maxima, and at positive prices.)

(a) Initially, the two firms collude in order to maximize their combined profit, as one monopolist would. Find the prices (p, q), the production levels (x, y), and the profits of firms A and B.

(b) Then an anti-trust authority prohibits collusion, so each producer maximizes its own profit, taking the other's price as given. If q is fixed, how will A choose p as a function $p = p_A(q)$ of q? If p is fixed, how will B choose q as a function $q = q_B(p)$ of p?

(c) Under the assumptions in part (b), what constant equilibrium prices are possible? What are the production levels and profits in this case?

(d) Draw a diagram with p along the horizontal axis and q along the vertical axis, and draw the "reaction" curves $p_A(q)$ and $q_B(p)$. Show on the diagram how the two firms' prices change over time if A breaks the cooperation first by maximizing its profit, taking B's initial price as fixed, then B answers by maximizing its profit with A's price fixed, then A responds, and so on.

$$x = 29 - 5p + 4q \text{ and } y = 16 + 4p - 6q$$

Firm A has total costs $5 + x$, whereas firm B has total costs $3 + 2y$. (Assume that the functions to be maximized have maxima, and at positive prices.)

(a) Initially, the two firms collude in order to maximize their combined profit, as one monopolist would. Find the prices (p, q), the production levels (x, y), and the profits of firms A and B.

→ Opstil profitmaksimeringsproblemet

Løs det vha. de nødvendige FOCs

[Overvej: Hvordan kan man vise, at løsningen der fås vha FOCs faktisk er et (globalt) max-pkt]

Profitfkt: $\pi_M(p,q) = x \cdot p - (5+x) + y \cdot q - (3+2y)$

$= x(p-1) + y(q-2) - 8$

$= (29-5p+4q)(p-1) + (16+4p-6q)(q-2) - 8$

Løs:

$$\max_{p,q>0} \pi_M(p,q)$$

FOCs:

mht p: $-5\cdot(p-1) + (29-5p+4q)\cdot 1 + 4\cdot(q-2) = 0$

mht q: $4\cdot(p-1) + (-6)\cdot(q-2) + (16+4p-6q)\cdot 1 = 0$

mht p : $-10p + 8q + 26 = 0$

mht q : $8p - 12q + 24 = 0$

Løsning: $p = 9$, $q = 8$

$x = 16$, $y = 4$

$\Pi_M^A = 123$, $\Pi_M^B = 21$

$$x = 29 - 5p + 4q \text{ and } y = 16 + 4p - 6q$$

Firm A has total costs $5 + x$, whereas firm B has total costs $3 + 2y$.

(b) Then an anti-trust authority prohibits collusion, so each producer maximizes its own profit, taking the other's price as given. If q is fixed, how will A choose p as a function $p = p_A(q)$ of q? If p is fixed, how will B choose q as a function $q = q_B(p)$ of p?

$\rightarrow$ Opstil profitmaksimeringsproblem for hhv. A og B

Løs dem og find dermed $p_A(q)$ og $q_B(p)$

$$\pi_A(p,q) = xp - (5+x) = x(p-1) - 5 = (29 - 5p + 4q)(p-1) - 5$$

$$\max_{p>0} \pi_A(p,q)$$

FOC: $-5(p-1) + (29 - 5p + 4q) \cdot 1 = 0 \longrightarrow \underline{p = p_A(q) = \frac{1}{5}(17 + 2q)}$

$$\pi_B(p,q) = yq - (3+2y) = y(q-2) - 3 = (16 + 4p - 6q)(q-2) - 3$$

$$\max_{q>0} \pi_B(p,q)$$

FOC: $-6(q-2) + (16 + 4p - 6q) \cdot 1 = 0 \longrightarrow \underline{q = q_B(p) = \frac{1}{3}(7 + p)}$

(c) Under the assumptions in part (b), what constant equilibrium prices are possible? What are the production levels and profits in this case?

Fra (b):

$$p_A(q) = \frac{1}{5}(17 + 2q) \qquad q_B(p) = \frac{1}{3}(7 + p)$$

En *(Nash)-ligevægt* (Nash equilibrium) består af priser p^* og q^* så:

$$p_A(q^*) = p^* \quad \text{og} \quad q_B(p^*) = q^*$$

→ Find ligevægten ved at opstille to ligninger med to ubekendte og løse dem

Sammenlign med situationen fra (a)

$$\frac{1}{5}(17 + 2q^*) = p^* \quad \text{og} \quad \frac{1}{3}(7 + p^*) = q^*$$

Løsn:

$$\underline{p^* = 5}, \quad \underline{q^* = 4}$$

$$x^* = 20, \quad y^* = 12$$

$$\pi_A^* = 75, \quad \pi_B^* = 21$$

Bemærk:

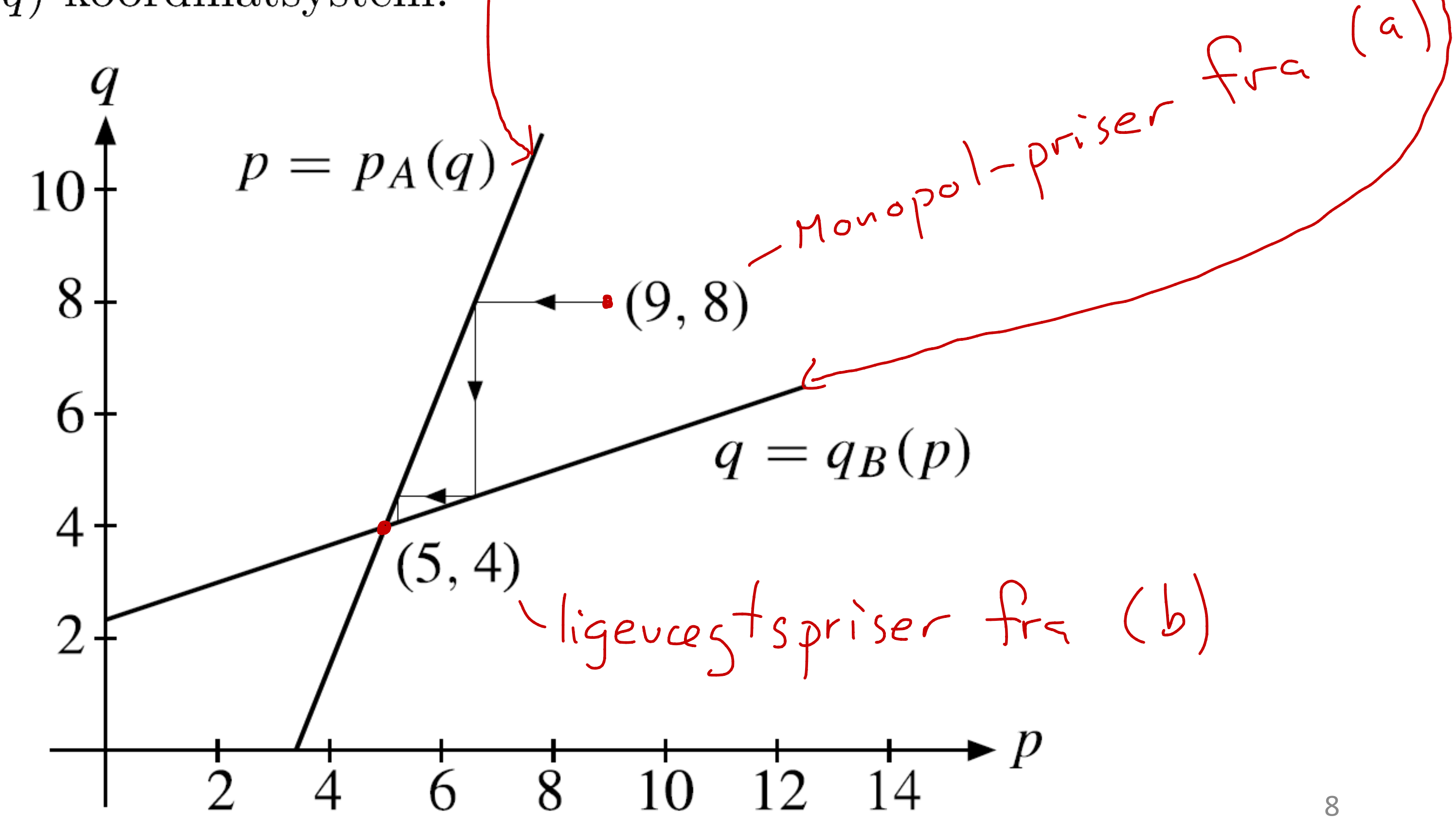
Lavere priser, større produktion, lavere samlet profit end i (a).

(d) Draw a diagram with p along the horizontal axis and q along the vertical axis, and draw the "reaction" curves $p_A(q)$ and $q_B(p)$. Show on the diagram how the two firms' prices change over time if A breaks the cooperation first by maximizing its profit, taking B's initial price as fixed, then B answers by maximizing its profit with A's price fixed, then A responds, and so on.

Fra (b):

$$p_A(q) = \frac{1}{5}(17 + 2q) \qquad q_B(p) = \frac{1}{3}(7 + p)$$

Plot disse i (p, q)-koordinatsystem:



Eksamen juni 2019, opgave 2

Opgave 2

Lad funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved forskriften

$$\boxed{f(x,y) = -x^2 + 2x + \frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2 + 2y + 4}$$

1) Find de partielle afledede

$= f_1'(x,y)$ $= f_2'(x,y)$

$\underline{f_x'(x,y)}$ og $\underline{f_y'(x,y)}$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$=$ kritiske

2) Vis, at f har netop to <u>stationære</u> punkter, og find disse.

3) Find Hessematricen $\underline{H(x,y)}$ for f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$= f''(x,y)$

4) Undersøg for hvert af de to stationære punkter, om det er et <u>maksimumspunkt</u>, <u>minimumspunkt</u> eller sadelpunkt.

$\wedge$ lokalt $\wedge$ lokalt

5) Find en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $(2, 0, f(2,0))$.

6) Find værdimængden for f.

$$f(x,y) = -x^2 + 2x + \frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2 + 2y + 4$$

1) Find de partielle afledede

$$f_x'(x,y) \quad \text{og} \quad f_y'(x,y)$$

i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2) Vis, at f har netop to stationære punkter, og find disse.

3) Find Hessematricen $H(x,y)$ for f i et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

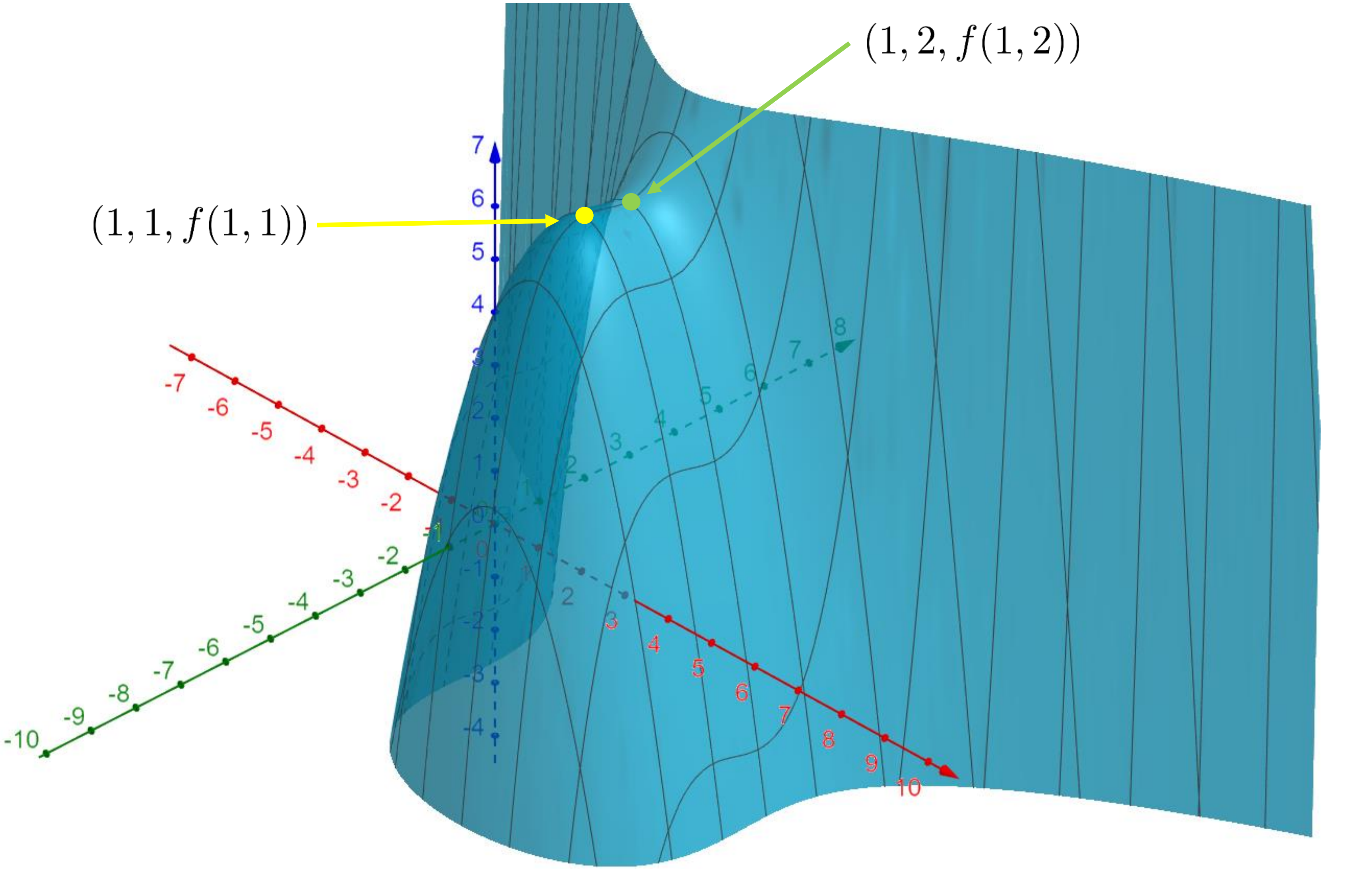
$$f(x,y) = -x^2 + 2x + \frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2 + 2y + 4$$

4) Undersøg for hvert af de to stationære punkter, om det er et maksimumspunkt, minimumspunkt eller sadelpunkt.

5) Find en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $(2, 0, f(2,0))$.

6) Find værdimængden for f.

$$f(x,y) = -x^2 + 2x + \frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2 + 2y + 4$$



Ekstra: Mikroøk. I, dec 2016, opg 3

3. Produktion

Betragt en virksomhed, der producerer et output ved hjælp af to inputs: arbejdskraft og fysisk kapital. Virksomhedens produktionsfunktion er

$$x = f(l, k) = 4l^{\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{4}},$$

hvor x er mængden af output, l er mængden af arbejdskraft, k er mængden af fysisk kapital.

(a) Har virksomheden aftagende, konstant eller voksende skala-afkast (returns to scale)? Begrund dit svar.

(b) Lad prisen på arbejdskraft ($w > 0$), lejeprisen på kapital ($r > 0$) og prisen på output ($p > 0$) være eksogene. Opstil virksomhedens profitmaksimeringsproblem. Find førsteordensbetingelserne.

(c) Hvor stor en mængde arbejdskraft vil virksomheden bruge i forhold til mængden af kapital? Find den profitmaksimerende produktionsplan når $w = 8$, $r = 2$, $p = 8$.

$$x = f(l,k) = 4l^{\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{4}}$$

(a) Har virksomheden aftagende, konstant eller voksende skala-afkast (returns to scale)? Begrund dit svar.

Bemærk: Hvis produktionsfunktionen er homogen af grad k, så har virksomheden aftagende skala-afkast hvis $k < 1$, konstant skalaafkast hvis $k = 1$ og voksende skala-afkast hvis $k > 1$.

$$x = f(l,k) = 4l^{\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{4}}$$

(b) Lad prisen på arbejdskraft $(w > 0)$, lejeprisen på kapital $(r > 0)$ og prisen på output $(p > 0)$ være eksogene. Opstil virksomhedens profitmaksimeringsproblem. Find førsteordensbetingelserne.

$$x = f(l,k) = 4l^{\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{4}}$$

(c) Hvor stor en mængde arbejdskraft vil virksomheden bruge i forhold til mængden af kapital? Find den profitmaksimerende produktionsplan når $w = 8$, $r = 2$, $p = 8$.

Bemærk: Antag først, at løsningen til førsteordensbet. fra (b) er et max-pkt, og brug dette til at besvare spørgsmålet

Prøv til sidst at vise, at profitfunktionen faktisk er konkav, dvs opfylder betingelserne i Theorem 13.2.1(a), s.500