Matematik A E2019
Uge 50, Forelæsning 2

Eksamensforberedelse!

I dag

- Tidligere eksamensopg: Juni 2019 opg 2-3, Aug 2019 opg 1 (dem vi ikke nåede i mandags)
- Spørgsmål på mail (3 stk): konvergens af uendelig række, finansiel matematik (nutidsværdi, annuiteter, annuitetslån), optimal forberedelse
- Tak for dette semester og held og lykke!
- Hvis vi er færdige før tid, så bliver jeg hængende, hvis nogle vil spørge om noget "face-to-face"

- **Definitionen af hvornår en uendelig række konvergerer.**
  [Se afsnit 10.4 (s. 387-8 for generelle rækker) og slides fra uge 43, forel. 1]

For en uendelige række $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$

består *afsnitsfølgen* $\{s_n\}$ af "partial-summerne"

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

(Dvs. $s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$)

Hvis afsnitsfølgen $\{s_n\}$ er konvergent med $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, så siges den uendelige række at være konvergent med sum s:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s \quad (= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i)$$

Eksempler:

$$\sum_{i=1}^{\infty} ak^{i-1} \quad (\text{antag } a \neq 0 \text{ og } |k| < 1)$$

Partialsummer: $$s_n = \sum_{i=1}^{n} ak^{i-1} = a\frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (\text{formel for endelig geom. række})$$

$$\to a\tfrac{-1}{k-1} = \tfrac{a}{1-k} \qquad \text{for } n \to \infty$$

Altså er rækken konvergent med sum $\frac{a}{1-k}$: $$\sum_{i=1}^{\infty} ak^{i-1} = \frac{a}{1-k}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i$$

Partialsummer: $$s_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i = \begin{cases} -1 & \text{hvis } n \text{ ulige} \\ \cancel{1} \; 0 & \text{hvis } n \text{ lige} \end{cases}$$

Heraf ses, at rækken ikke er konvergent!

- **Lidt repetition af finansiel matematik: Nutidsværdi, annuiteter, annuitetslån**
  [Se især afsnit 10.3,5,6 og slides fra uge 43, forelæsning 2]

Nutidsværdi (10.3):

Hvad er "nutidværdien" A af et beløb K til betaling om t år?

(ved årlig rente r og årlig rentetilskrivning)

Ved t årlige forrentninger skal A vokse til K:

$$A(1+r)^t = K$$

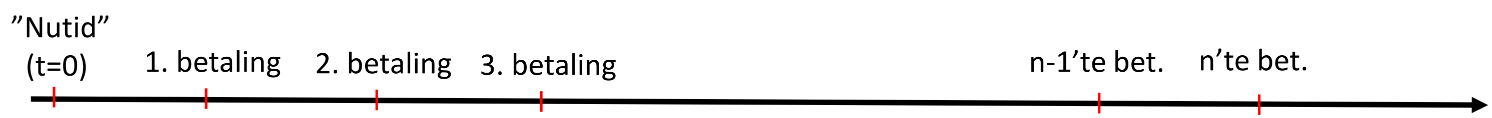
Altså:

$$\boxed{A = K(1+r)^{-t}}$$

Ved kontinuert rentetilskrivning fås tilsvarende:

$$Ae^{rt} = K \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = Ke^{-rt}}$$

Annuitet (10.5): En række betalinger af et fast beløb med faste mellemrum over et givent tidsrum.



Betalinger: a a a a a

Nutidsværdi: $\frac{a}{1+r}$ $\frac{a}{(1+r)^2}$ $\frac{a}{(1+r)^3}$ $\ldots$ $\frac{a}{(1+r)^{n-1}}$ $\frac{a}{(1+r)^n}$

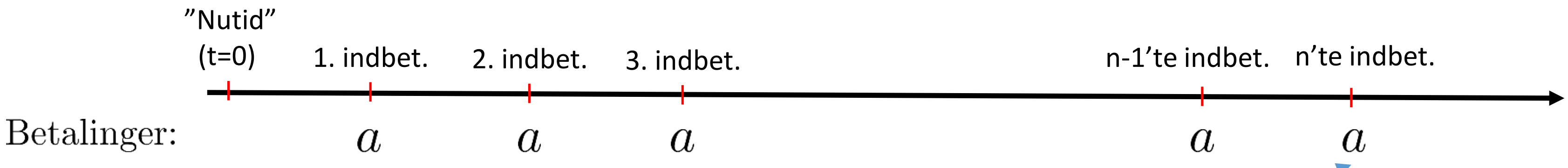
Hvad er nutidsværdien/PDV af en sådan annuitet?

(ved rente r per periode (fx årlig) og rentetilskrivning hver periode)

$$P_n = \frac{a}{1+r} + \frac{a}{(1+r)^2} + \frac{a}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{a}{(1+r)^n}$$

$$= \frac{a}{1+r}\underbrace{\left(1 + \left(\frac{1}{1+r}\right) + \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{1+r}\right)^{n-1}\right)}_{\text{Endelig geometrisk række! } \left(k = \frac{1}{1+r}\right)}$$

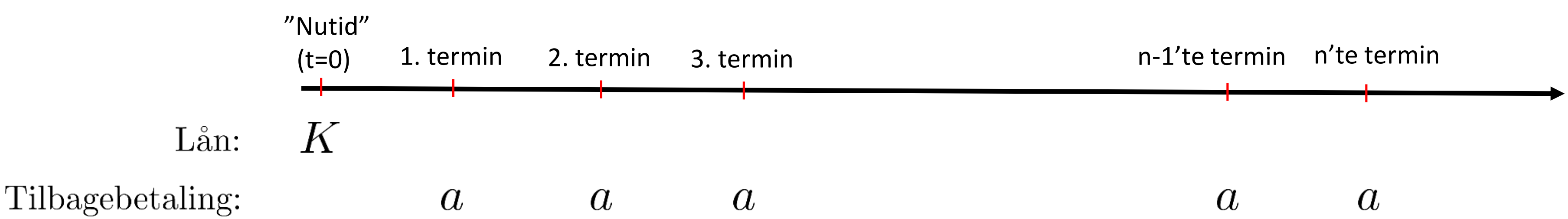
$$= \frac{a}{1+r}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)}\right) = \boxed{\frac{a}{r}\left(1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right)}$$



"Fremtidsværdien" F_n af annuiteten er værdien umiddelbart efter den sidste indbetaling

$$F_n = P_n(1+r)^n = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)(1+r)^n = \boxed{\frac{a}{r}\left((1+r)^n - 1\right)}$$

Annuitetslån (10.6): Der stiftes en gæld K, som tilbagebetales med faste beløb med faste mellemrum over et givent tidsrum.



Sammenhængen mellem K, a, r og n: $\boxed{K = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)}$

(K lig nutidsværdi af annuiteten bestående af tilbagebetalinger)

Husk: r er terminsrenten!

- **Optimal forberedelse til eksamen?**

Optimal forberedelse vil selvfølgelig afhænge af den enkelte, men her er et par (lidt trivielle…) bemærkninger:

  - Gå igennem pensum, slides og (i hvert fald en del af) opgaverne uge for uge. Få styr på vigtige definitioner, resultater og metoder. Er der noget du har haft svært ved til prøveeksamen eller ifm regning af tidligere eks.opg, så kig ekstra på det.
  - Husk at træne grundlæggende håndværk (fx ligningsløsning, differentiation,…)!
  - Få gennemregnet de 6 tidligere eksamenssæt. Selvom opgaverne er kendte, så lav evt din/jeres egne små prøveeksamener på 2t.

    [NB: Disse sæt dækker meget af pensum, men ikke alt!]
  - Brug jeres grupper – hjælp hinanden!